

Universidade Federal Fluminense  
Instituto de Geociências  
Departamento de Geologia e Geofísica

Modelagem viscoacústica e de anomalias AVO usando a equação de  
Zoeppritz e suas aproximações

Ammir Ayman Karsou

Niterói - RJ  
2017

Ammir Ayman Karsou

Modelagem viscoacústica e de anomalias AVO usando a equação de  
Zoeppritz e suas aproximações

Monografia apresentada ao Curso de Geofísica da Universidade Federal Fluminense, como parte das exigências para obtenção do título de Geofísico.

Orientador: Prof. Dr. Wagner Moreira Lupinacci, D.Sc.

Niterói - RJ  
2017

---

# Modelagem viscoacústica de anomalias AVO usando a equação de Zoeppritz e suas aproximações

Ammir Ayman Karsou

Monografia apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense, como parte das exigências para obtenção do título de Engenheiro de Exploração e Produção de Petróleo.

Comissão Examinadora:

---

Prof. Dr. Luiz Alberto Santos (PETROBRAS E LAGEMAR/UFF)

---

Prof. Dr. Marco Antonio Cetale Santos (LAGEMAR/GISIS/UFF)

---

Prof. Dr. Wagner Moreira Lupinacci - Orientador (LAGEMAR/GISIS/UFF)

Dedico o presente trabalho à minha família e amigos, especialmente minha mãe e meu pai, que sempre fizeram de tudo para me ajudar e me proporcionar uma vida melhor.



## Agradecimentos

---

Agradeço a meus pais, que sempre trabalharam duro para dar o melhor que podiam para mim e para meu irmão, tornando possível viver em Niterói e concluir a faculdade de Geofísica.

Agradeço à minha família, em especial minhas tias Amany, Asma e Balquees e minha avó Miriam que sempre me ajudaram em tudo e sempre me fortaleceram nos meus momentos mais frágeis.

À meus segundos pais Marcius Oliveira, Ivan do Vale Pereira e Miriam Aparecida da Costa, que me apoiaram como pais nessa jornada.

Agradeço aos meus amigos, Alexandre Moreira, Diego Castro, Ewerton Leitão, Gabriel Matos, Gabriel Ferraz João Baroato, Wanderson Souza, Adelino Fontoura, Alice Vasconcellos, Cayo Fonseca, Gabriel Brando, Gabriela Esteves, Heloisa Sinara, Henrique Nogueira, Ilson Filho, Israeli Rodrigo, Juan Carlos, Julio Santana, Lael Filho, Luiz Paulo, Maria Fernanda, Maria Thereza, Matheus do Valle, Matheus Klatt, Monique Chaves, Patrícia Descovi, Pedro Campos, Pedro Bandoli, Reinaldo Mozart, Thiago Moreira, Vanessa Cunha, Wanessa Rodrigues e Yuri Borges. Todos estiveram sempre do meu lado e tenho muita sorte de ter o apoio e carinho de todos vocês.

E finalmente, agradeço ao meu professor e orientador Wagner Moreira Lupinacci, que sempre me ajudou em todas as tarefas, me ofereceu todas as oportunidades que pôde e sempre teve muita paciência ao lidar comigo. Quero agradecer de grande coração, sei que não foi fácil para você. Agradeço também ao professor membro da banca, Marco Antônio Cetale Santos, que esteve presente no período de meu maior aprendizado na faculdade e sempre esteve disposto a transmitir todo seu conhecimento para a turma e agradeço ao membro da banca, o professor Luiz Alberto Santos, que tive o enorme prazer em conhecer e ter aula. Obrigado a todos.

Um último agradecimento é para a Universidade Federal Fluminense e todos os professores que buscaram de todas as formas passar da melhor maneira o conhecimento que tinham. Em especial o professor Rogério de Araújo Santos por ajudar meu time na IBA e os professores André Luiz Ferrari e José Antônio Baptista Neto, que sempre buscara, de maneira dedicada nos mostrar os defeitos que podíamos mudar. Também a todos que direta ou indiretamente participaram do meu aprendizado e formação. Muito obrigado a todos!

*"Deixem que o futuro diga a verdade e avalie cada um de acordo com o seu trabalho e realizações. O presente pertence a eles, mas o futuro pelo qual eu sempre trabalhei pertence a mim." -Nikola Tesla*

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>xi</b>
<b>Abstract</b>	<b>xii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Revisão Teórica</b>	<b>4</b>
2.1 Teoria de propagação de ondas . . . . .	4
2.2 Refletividade em um meio elástico . . . . .	11
2.3 Tipos de Anomalias <i>AVO</i> . . . . .	17
2.4 Princípio de Huygens e difração . . . . .	19
<b>3 Metodologia</b>	<b>26</b>
3.1 Modelagem dos dados pós-empilhamento . . . . .	27
<b>4 Resultados e Considerações</b>	<b>29</b>
4.1 Modelos Geológicos . . . . .	29
4.2 Modelagem viscoacústica . . . . .	30
4.3 Modelagem elástica . . . . .	36
<b>5 Conclusões</b>	<b>45</b>
<b>Apêndice A - Dedução das equações de Zoeppritz</b>	<b>50</b>
A.1 Condições de Contorno . . . . .	50
A.2 Lei de Snell Generalizada . . . . .	52
A.3 Demonstração . . . . .	53

# ***Lista de Figuras***

1	Ilustração com um esquema da tensão normal ( $\sigma_{xx}$ ) e as tensões cisalhantes ( $\sigma_{yx}$ , $\sigma_{zx}$ ). Modificado de Sheriff e Geldart (1995). . . . .	5
2	Deformação de um retângulo em três dimensões, fazendo um ângulo $\delta$ . Modificado de Telford <i>et al.</i> (1990). . . . .	6
3	Relação entre tensão por Deformação para um corpo hipotético. Modificado de Kearey <i>et al.</i> (2002). . . . .	7
4	Direção de compressão e deslocamento de uma onda-P. Modificado de Kearey <i>et al.</i> (2002). . . . .	10
5	Esquema da perturbação perpendicular a direção de propagação da onda-S. Modificado de Kearey <i>et al.</i> (2002). . . . .	11
6	Gráfico do gradiente pelo intercepto com a subdivisão de quadrantes e a localização das anomalias AVO em cada região do gráfico. (Adaptado de Castagna e Swan (1997)). . . . .	18
7	Gráfico representando a variação da amplitude com relação ao ângulo de incidência, as cores e os números representam as respectivas anomalias do AVO. . . . .	19
8	Ilustração do princípio de Huygens, sendo os pontos $a$ , $a'$ , $b$ , $b'$ , $c'$ e $c'$ fontes pontuais secundárias para novas frentes de ondas. (Adaptado de Alonso e Finn (1967)). . . . .	20
9	Ilustração das frentes de onda plana sofrendo difração ao encontrar uma falha. (Modificado de Sheriff e Geldart (1995)). . . . .	21
10	Configuração do modelo geológico utilizado. . . . .	26
11	a) Pulso sísmico. b) Função de refletividade. c) Traço sísmico modelado. . . . .	27
12	a) Pulso sísmico em relação ao tempo. b) Espectro de frequência. . . . .	31

13	Resposta sísmica obtida para o Modelo 1: a) Sem ruído. b) Com ruído (gaussiano normalmente distribuído). c) Com ruído e os efeitos de atenuação e dispersão. . . . .	32
14	Resposta sísmica obtida para o Modelo 2: a) Sem ruído. b) Com ruído (gaussiano normalmente distribuído). c) Com ruído e os efeitos de atenuação e dispersão. . . . .	33
15	Resposta sísmica obtida para o Modelo 3: a) Sem ruído. b) Com ruído (gaussiano normalmente distribuído). c) Com ruído e os efeitos de atenuação e dispersão. . . . .	34
16	Resposta sísmica obtida para o Modelo 4: a) Sem ruído. b) Com ruído (gaussiano normalmente distribuído). c) Com ruído e os efeitos de atenuação e dispersão. . . . .	35
17	Resposta sísmica obtida para o Modelo 1 usando: a) Equação de Zoeppritz. b) Aproximação de Aki e Richards (1980). c) Aproximação de Shuey (1985). . . . .	37
18	a) Amplitude versus ângulo de incidência no topo do reservatório para as equações de Zoeppritz e suas aproximações para o Modelo 1. b) Módulo da diferença entre as aproximações e a equação de Zoeppritz para o Modelo 1. . . . .	38
19	Resposta sísmica obtida para o Modelo 2 usando: a) Equação de Zoeppritz. b) Aproximação de Aki e Richards (1980). c) Aproximação de Shuey (1985). . . . .	39
20	a) Amplitude versus ângulo de incidência no topo do reservatório para as equações de Zoeppritz e suas aproximações para o Modelo 2. b) Módulo da diferença entre as aproximações e a equação de Zoeppritz para o Modelo 2. . . . .	40
21	Resposta sísmica obtida para o Modelo 3 usando: a) Equação de Zoeppritz. b) Aproximação de Aki e Richards (1980). c) Aproximação de Shuey (1985). . . . .	41
22	a) Amplitude versus ângulo de incidência no topo do reservatório para as equações de Zoeppritz e suas aproximações para o Modelo 3. b) Módulo da diferença entre as aproximações e a equação de Zoeppritz para o Modelo 3. . . . .	42

23	Resposta sísmica obtida para o Modelo 4 usando: a) Equação de Zoeppritz. b) Aproximação de Aki e Richards (1980). c) Aproximação de Shuey (1985). . . . .	43
24	a) Amplitude versus ângulo de incidência no topo do reservatório para as equações de Zoeppritz e suas aproximações para o Modelo 4. b) Módulo da diferença entre as aproximações e a equação de Zoeppritz para o Modelo 4. . . . .	44
25	Ilustração demonstrando a reflexão, conversão e transmissão de uma onda compressional incidente com ângulo de incidência $\theta_1$ . . . . .	50

# ***Lista de Tabelas***

1	Tabela mostrando a relação entre os módulos elásticos (Mavko <i>et al.</i> (2009)). . . . .	9
2	Representação do quadrante, do sinal do intercepto, do sinal do gradiente e da variação da amplitude com o espaçamento das classes de anomalia AVO. (Modificado a partir de Castagna e Swan (1997)). . . .	18
3	Dados das velocidades-P, velocidades-S, densidades e espessuras das camadas do Modelo 1. . . . .	29
4	Dados das velocidades-P, velocidades-S, densidades e espessuras das camadas do Modelo 2. . . . .	29
5	Dados das velocidades-P, velocidades-S, densidades e espessuras das camadas do Modelo 3. . . . .	30
6	Dados das velocidades-P, velocidades-S, densidades e espessuras das camadas do Modelo 4. . . . .	30

## **Resumo**

A modelagem de anomalias de AVO consegue prever o comportamento do *gather* em um cenário geológico. Uma ferramenta para esta modelagem é a equação de Zoeppritz, mas em caso grande volume de dados, a alternativa é usar suas aproximações linearizadas. Os objetivos deste trabalho foram modelar um dado sísmico viscoacústico com a presença do ruído, atenuação e dispersão e também modelar as anomalias de AVO utilizando a equação de Zoeppritz e suas aproximações em diferentes cenários geológicos. A metodologia consistiu na criação de quatro modelos geológicos, possuindo diferentes valores de velocidade, velocidade cisalhante e densidade e analisar como seriam suas respostas sísmicas na modelagem viscoacústica e elástica. Na modelagem viscoacústica foi possível diferenciar as interfaces das camadas em quase todos os modelos, com exceção do Modelo 2, que possuía baixo contraste de impedância na região do reservatório. Os fenômenos de atenuação e dispersão dificultaram as interpretações na região do reservatório, devido à diminuição da resolução sísmica. Na modelagem elástica com a equação de Zoeppritz e as aproximações de Aki e Richards (1980) e Shuey (1985), ambas as aproximações são idênticas até o ângulo de incidência de  $5^\circ$ . Em ângulos maiores que este, a aproximação de Aki e Richards (1980) obteve menores erros percentuais quando comparado com a modelagem usando a equação de Zoeppritz.

**Palavras chave:** anomalias de AVO, Zoeppritz, modelagem direta, modelagem viscoacústica, modelagem elástica.

## ***Abstract***

The modelling of the seismic data provides the understanding of the wave propagation phenomena. The modelling of the AVO anomalies can predict the gather behaviour in a geologic scenario. One tool for this modelling is the Zoeppritz equation, but in the case of big data volume, the alternative is to use its linearized approximations. The aims of this work are modelling a viscoacoustic seismic data with the presence of noise, attenuation and dispersion and also modelling the AVO anomalies using the Zoeppritz equation and its approximations for different geologic scenarios. The methodology consisted on the creation of four geologic models, each having different values of compressional velocity, shear velocity and density, thereby analyzing its seismic response in the viscoacoustic and elastic modelling. In the viscoacoustic modelling, it is possible to differ the layer's interfaces in almost all of the models, with exception of the Model 2, that had low acoustic impedance contrast in the reservoir region. The attenuation and dispersion phenomena had hampered the interpretation in the reservoir region, due to the decrease of seismic resolution. In the elastic modelling using the Zoeppritz equation and the Aki and Richards (1980) and Shuey (1985) approximation, both are identical until the incidence angle  $5^\circ$ . In higher angles, Aki and Richards (1980) approximation was that better replied the Zoeppritz equation, obtaining the lowest relative error in almost all of the models created.

**Keywords:** AVO anomalies, Zoeppritz, direct modelling, viscoacoustic modelling, elastic modelling.

# 1 *Introdução*

O levantamento sísmico é uma ferramenta usada para a obtenção de informações sobre a subsuperfície da Terra. A sísmica se tornou um dos métodos geofísicos mais utilizados devido à alta empregabilidade, resolução, penetração e acurácia no reconhecimento de feições de interesse. Com a contínua exploração de novas áreas exploratórias de hidrocarbonetos cada vez mais complexas, faz-se necessário os aperfeiçoamentos das tecnologias empregadas e dos conceitos teóricos de técnicas de aquisição, processamento, interpretação dos dados.

O método sísmico consiste em emitir uma onda acústica, que ao viajar pelo meio sofre reflexões e refrações e são captadas por receptores. Estes receptores medem o tempo de trânsito e a amplitude da onda sísmica que viajou até um refletor e foi captada por um receptor (TELFORD *et al.*, 1990).

A modelagem de dados sísmicos é uma ferramenta chave no estudo dos fatores que interferem na propagação das ondas sísmicas. Assim, dados modelados conseguem prever fenômenos que prejudicam a confiabilidade das informações que podem ser obtidas através da sísmica. Como exemplo desses fenômenos temos: ruído, múltiplas, atenuação e dispersão que são primeiro analisados em dados modelados. Algoritmos podem ser implementados para corrigir ou amenizar estes efeitos, melhorando assim a razão sinal/ruído e a resolução dos dados, o que possibilita uma melhor interpretação desses fenômenos que são difíceis de serem compreendidos.

Uma importante técnica usada na exploração de hidrocarbonetos é a variação da amplitude com o espaçamento (*Amplitude Versus Offset - AVO*) ou variação da amplitude com o ângulo (*Amplitude Versus Angle - AVA*), uma vez que se mostrou eficiente na distinção de “falsos” e “verdadeiros” *'bright-spots'*. Ostrander (1984) utilizou o AVO para separar anomalias ligadas a arenitos saturadas com gás de anomalias de arenitos saturados com água e folhelhos.

As equações de Zoeppritz relacionam a amplitude de uma onda plana a partir de seu ângulo de incidência e dos parâmetros elásticos: onda compressional, ondas

cisalhante e densidade dos dois meios e são a base para a modelagem de dados AVO.

Mesmo encontrando os coeficientes de reflexão para ambos os tipos de onda, a fórmula se torna extremamente complicada e não linear. Para contornar tal adversidade, Aki e Richards (1980) linearizaram estas equações com aproximações que produzem pequenas variações nas amplitudes com relação às equações de Zoeppritz.

Ao derivar aproximações de maior ordem ou corrigindo termos de equações linearizadas, a precisão para informações de maior ângulo foi aumentada, inclusive destacando a importância de se usar formas não lineares também para pequenos ângulos, em caso de alta variação nas propriedades elásticas. Apesar da densidade não ser um bom discriminador litológico, ela é essencial no monitoramento sísmico do reservatório e no estudo da sísmica 4D. Porém, a sua informação está nos *offsets* mais longos e as aproximações das equações de Zoeppritz não representam bem seus valores para ângulos maiores. Apesar do uso exato das equações de Zoeppritz ter maior dificuldade em sua manipulação, acaba se tornando necessária quando se deseja obter informações detalhadas do reservatório. Zhi *et al.* (2016) usaram a forma completa da equação de Zoeppritz em uma inversão para diferentes tipos de modelos iniciais, ruídos, e mudanças de *wavelets*. Li *et al.* (2015) retiraram conjuntamente informações de PP e PS, sendo útil para interpretações litológicas e do conteúdo de fluidos.

O objetivo principal deste trabalho foi implementar formulações teóricas e conseguir modelar um conjunto dados pós-empilhamento e pré-empilhamento utilizando como base o modelo convolucional para quatro cenários geológicos distintos, adicionando os efeitos que são causados por características físicas da propagação de ondas, tais como a dispersão e a atenuação nos dados pós-empilhamento e utilizando as equações de Zoeppritz e suas aproximações para modelar o dado pré-empilhamento. Após a modelagem, foi feita uma análise dos resultados e também simulados modelos de sistemas petrolíferos para verificar a sensibilidade do método.

A divisão do trabalho foi determinada da seguinte maneira:

Capítulo 2 faz uma revisão teórica de todos os conceitos utilizados no trabalho, tais como o conceito de propagação de ondas, refletividade para meios elásticos e viscoelásticos; O Capítulo 3 mostra o fluxo de trabalho utilizado para a modelagem dos dados pós-empilhamento e pré-empilhamento; O Capítulo 4 apresenta os resultados da modelagem dos dados pós-empilhamento e pré-empilhamento e discute os resultados de todos os quatro modelos geológicos propostos; O Capítulo 5 contém

a conclusão obtida com base nos resultados e propõe futuros trabalhos que complementaríamos este estudo; E por final, no Apêndice A está toda a dedução matemática das equações de Zoeppritz, demonstrando como obter a matriz de Zoeppritz e o valor de  $R_{pp}$ .

## 2 *Revisão Teórica*

Neste capítulo são revisados alguns tópicos importantes dos assuntos abordados no trabalho. Estes tópicos são as teorias de propagação de ondas em um meio elástico e viscoelástico e do AVO.

### 2.1 Teoria de propagação de ondas

Nesta seção é explicada a teoria de ondas em meios elásticos e os tipos de ondas de corpo.

#### 2.1.1 Tensão e deformação

Quando um corpo sofre uma força externa, seu tamanho e forma mudam conforme a intensidade e direção da força aplicada. As forças internas do corpo tendem a conter a sua deformação, ou seja, aplicar resistência às forças externas para que o corpo volte ao seu estado original. A propriedade de resistir às tensões e deformações é chamada de elasticidade. Um corpo perfeitamente elástico sempre retornará ao estado original após ser tensionado ou deformado (SHERIFF; GELDART, 1995).

A tensão é definida como força por unidade de área, podendo também ser definida como uma razão de como a força aplicada varia para cada ponto infinitesimal de área. Quando a força aplicada é ortogonal à área, é chamada de tensão normal, caso a força seja aplicada tangencialmente é chamada de tensão cisalhante. Qualquer tensão pode ser decomposta nas componentes normal e cisalhante.

A Figura 1 mostra uma notação das tensões, os índices identificam as tensões normais e cisalhantes, por exemplo  $\sigma_{yx}$  indica que a tensão é paralela ao eixo-y e perpendicular ao eixo-x. Quando o índice é igual como no caso  $\sigma_{xx}$ , denota-se uma tensão normal na direção  $x$ .

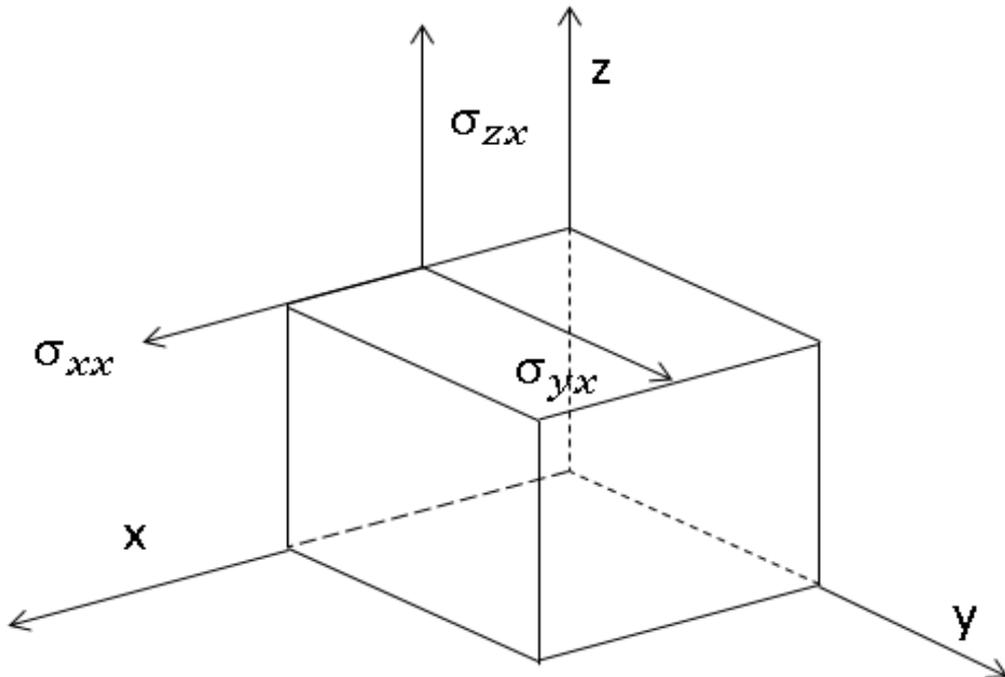


Figura 1: Ilustração com um esquema da tensão normal ( $\sigma_{xx}$ ) e as tensões cisalhantes ( $\sigma_{yx}$ ,  $\sigma_{zx}$ ). Modificado de Sheriff e Geldart (1995).

Partindo do pressuposto que o corpo está em equilíbrio estático, as tensões terão a mesma magnitude. As tensões cisalhantes tendem a rotacionar o corpo, mas caso o corpo respeite o equilíbrio estático, as diferentes tensões serão de igual magnitude. Neste caso temos:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (2.1)$$

Se todos os vértices sofrerem o mesmo deslocamento  $u$  no eixo- $x$ ,  $v$  no eixo- $y$  e  $w$  no eixo- $z$ , não haverá deformação, devido à preservação do tamanho e forma. No caso de existirem diferentes deslocamentos para cada vértice, haverá mudança na forma do corpo (Figura 2).

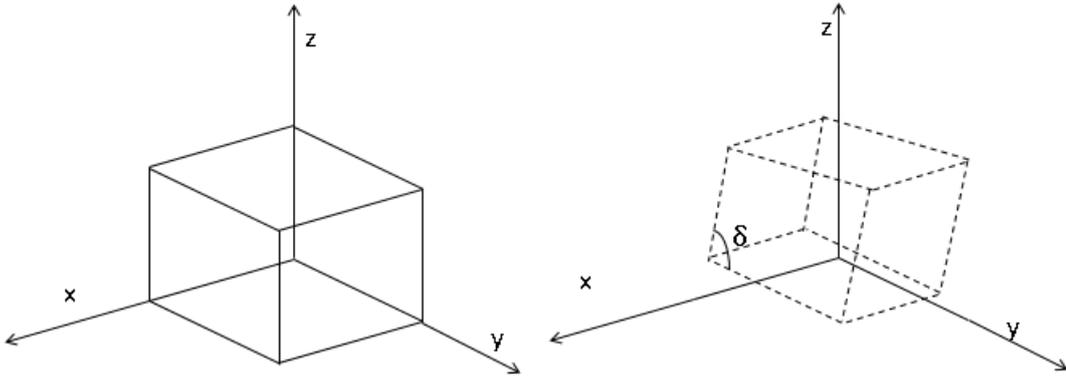


Figura 2: Deformação de um retângulo em três dimensões, fazendo um ângulo  $\delta$ . Modificado de Telford *et al.* (1990).

Quando diferentes tensões atuam em um corpo, o corpo sofrerá mudanças em sua forma, tais mudanças são chamadas de deformações.

A tensão é a diferença infinitesimal na dimensão ou forma do objeto, sendo  $\frac{\delta u}{\delta x}$ ,  $\frac{\delta v}{\delta y}$  e  $\frac{\delta w}{\delta z}$  as diferenças infinitesimais nas direções dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente, definidos como deformações normais. As deformações que representam a rotação do corpo são chamadas de deformações cisalhantes. As deformações recebem a notação  $\epsilon_{xx}$ , onde índices iguais são deformações normais e índices diferentes são deformações cisalhantes. Assim, as deformações são representadas como:

- Deformações Normais

$$\epsilon_{xx} = \frac{\delta u}{\delta x}, \quad (2.2)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\delta v}{\delta y}, \quad (2.3)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\delta w}{\delta z}. \quad (2.4)$$

- Deformações Cisalhantes

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x}, \quad (2.5)$$

$$\epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} = \frac{\delta w}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta z}, \quad (2.6)$$

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} = \frac{\delta w}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta z}. \quad (2.7)$$

### 2.1.2 Lei de Hooke generalizada

A Lei de Hooke demonstra que para muitos materiais elásticos, a deformação é linear e diretamente proporcional ao esforço. Essa deformação é reversível quando o esforço aplicado está no limite elástico. Quando o limite elástico é ultrapassado, a deformação torna-se não linear e irreversível (deformação dúctil), rompendo permanentemente ao chegar em seu limite de ruptura ou ponto de fraturamento. A Figura 3 mostra um gráfico da tensão pela deformação em um corpo. Neste trabalho, considera-se que os esforços e as deformações estão no campo elástico.

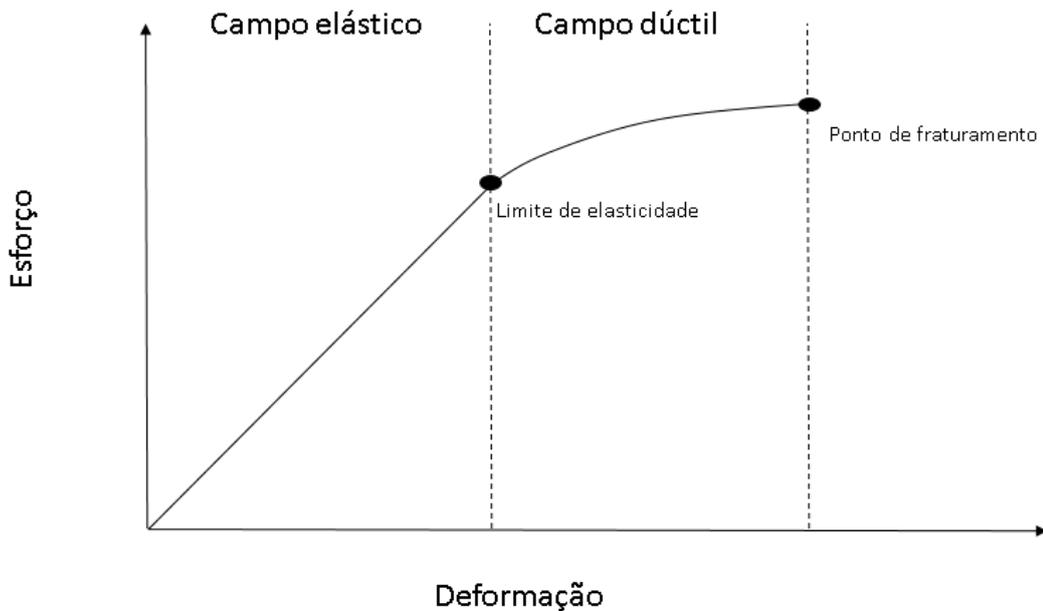


Figura 3: Relação entre tensão por Deformação para um corpo hipotético. Modificado de Kearey *et al.* (2002).

Para a tensão e deformações de um corpo no campo elástico, a relação é dada a partir dos parâmetros elásticos do corpo. Quando o meio é isotrópico, as propriedades elásticas não dependem da direção e a relação entre tensão e deformação ficam mais simples. A relação pode ser expressa como:

para  $(i = x, y, z)$ ,

$$\sigma_{ii} = \lambda \Delta + 2\mu\epsilon_{ii}. \quad (2.8)$$

E para  $(i, j = x, y, z)$ :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij}, \quad (2.9)$$

no qual  $\mu$  e  $\lambda$  são chamados parâmetros ou constantes de Lamé, sendo  $\mu$  uma medida do módulo de cisalhamento.

Resultando em  $\sigma = C\epsilon$  ou  $\epsilon = R\sigma$ , no qual  $C$  é a matriz de complacência e  $R$  a de rigidez, sendo  $R = C^{-1}$ . Como  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , os termos de  $\mu$  são divididos por 2. Na forma matricial tem-se para um meio elástico isotrópico:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Logo, tipos diferentes de constantes elásticas podem ser definidas, as equações 2.8 e 2.9 estão em função das constantes  $\lambda$  e  $\mu$ .

### 2.1.3 Constantes Elásticas

As constantes elásticas são definidas em função da tensão pela deformação. Uma destas constantes é o módulo de Young ( $E$ ), que indica a variação no comprimento de um cilindro quando aplicada uma força, como:

$$E = \frac{\sigma_{xx}}{\epsilon_{xx}}. \quad (2.11)$$

O módulo de compressibilidade ( $K$ ) representa a variação volumétrica  $\frac{\Delta V}{V}$  de um corpo na aplicação de uma tensão  $P$  normal em todas as direções: O sinal é negativo, pois o módulo é uma medida de pressão, não podendo ser negativo devido o corpo possuir  $\Delta V$  negativo; No qual  $\Delta V$  é a variação do volume do corpo e  $V$  é o volume do corpo.

$$K = \frac{-P}{\frac{\Delta V}{V}}. \quad (2.12)$$

A razão de Poisson ( $\nu$ ) é definida como mede a deformação transversal de um material homogêneo e isotrópico, definido por:

$$\nu = \frac{-\epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx}} = \frac{-\epsilon_{zz}}{\epsilon_{xx}}. \quad (2.13)$$

Todos os parâmetros elásticos podem ser descritos em função das constantes de Lamé, ficando na forma:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad (2.14)$$

$$K = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{3}, \quad (2.15)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + 2\mu)}. \quad (2.16)$$

Quando o corpo tensionado é um fluido newtoniano elástico, o módulo cisalhante é zero, pois este não exerce resistência ao cisalhamento, resultando em  $K = \lambda$  para o fluido. A partir do conhecimento de dois módulos elásticos, pode-se estimar todos os outros, isto é mostrado na tabela 1:

Tabela 1: Tabela mostrando a relação entre os módulos elásticos (Mavko *et al.* (2009)).

$K$	$E$	$\lambda$	$\nu$	$M$	$\mu$
$\lambda + 2\mu/3$	$\mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}$	—	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\lambda + 2\mu$	—
—	$9K \frac{K-\lambda}{3K-\lambda}$	—	$\frac{\lambda}{3K-\lambda}$	$3K - 2\lambda$	$3(K - \lambda)/2$
—	$\frac{9K\mu}{3K+\mu}$	$K - 2\mu/3$	$\frac{3K-2\mu}{2(3K+\mu)}$	$K + 4\mu/3$	—
$\frac{E\mu}{3(3\mu-E)}$	—	$\mu \frac{E-2\mu}{(3\mu-E)}$	$E/(2\mu) - 1$	$\mu \frac{4\mu-E}{3\mu-E}$	—
—	—	$3K \frac{3K-E}{9K-E}$	$\frac{3K-E}{6K}$	$3K \frac{3K+E}{9K-E}$	$\frac{3KE}{9K-E}$
$\lambda \frac{1+\nu}{3\nu}$	$\lambda \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}$	—	—	$\lambda \frac{1-\nu}{\nu}$	$\lambda \frac{1-2\nu}{2\nu}$
$\mu \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$2\mu(1 + \nu)$	$\mu \frac{2\nu}{1-2\nu}$	—	$\mu \frac{2-2\nu}{1-2\nu}$	—
—	$3K(1 - 2\nu)$	$3K \frac{\nu}{1+\nu}$	—	$3K \frac{1-\nu}{1+\nu}$	$3K \frac{1-2\nu}{2+2\nu}$
$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	—	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	—	$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{E}{2+2\nu}$
$M - \frac{4}{3}\mu$	—	$M - 2\mu$	$\frac{M-2\mu}{2(M-\mu)}$	—	—

## 2.1.4 Ondas de corpo

As ondas de corpo foram primeiramente estudadas a partir de abalos sísmicos. Posteriormente, foram utilizadas em fonte controlada para estudar a geologia de sub-superfície, tornando-se alvo de muitos estudos e pesquisas sobre o seu comportamento ao encontrar diferentes litologias (KEAREY *et al.*, 2002). As ondas de corpo podem ser divididas em dois tipos: ondas compressoriais ou ondas-P e ondas cisalhantes ou ondas-S.

As ondas-P (ondas compressoriais) são chamadas desta maneira pois são as primeiras a chegar as estações de medição durante um abalo sísmico. Sua natureza é compressiva e o seu eixo de compressão é paralelo ao deslocamento, inicialmente comprimindo e depois dilatando um corpo durante sua passagem, como mostra a Figura 4. A sua velocidade ( $\alpha$ ) pode ser expressa por meio de suas constantes elásticas da seguinte forma:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (2.17)$$

no qual  $\rho$ , é a densidade do meio.

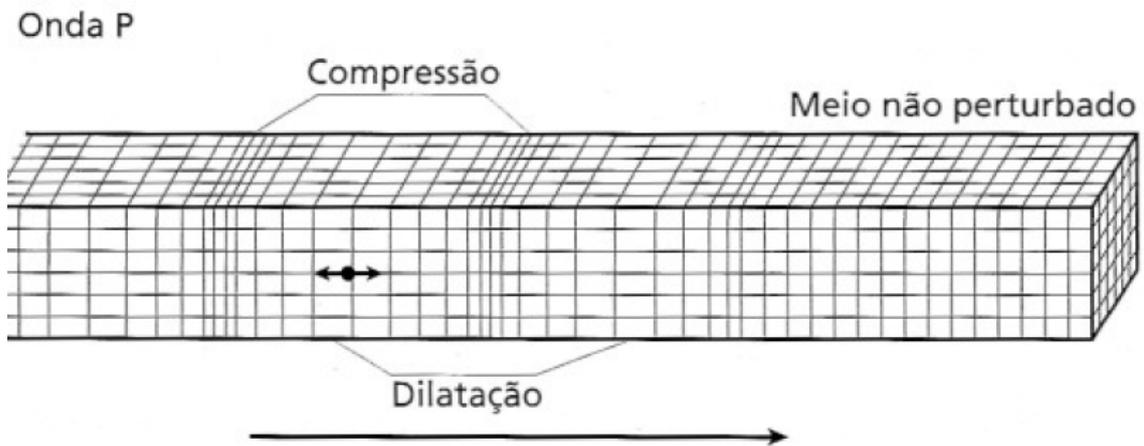


Figura 4: Direção de compressão e deslocamento de uma onda-P. Modificado de Kearey *et al.* (2002).

As ondas-S (ondas cisalhantes) perturbam o meio perpendicularmente a sua direção de propagação. Este tipo de onda não era muito utilizada, devido à sua pequena amplitude e por ser difícil de separá-la no receptor. Com o avanço dos geofones, passou-se a medir nas três direções ( $x$ ,  $y$  e  $z$ ), como é o caso dos *Nodes*, *Ocean Bottom Cable* (OBC) e os Sistemas Permantens. As ondas-S vem sendo cada vez mais utilizadas, devido às vantagens de utilizá-las em conjunto com as ondas-P para

diferenciar litologias e fluidos presentes no meio. A Figura 5 é um esquema de como a partícula é perturbada na passagem da onda cisalhante.

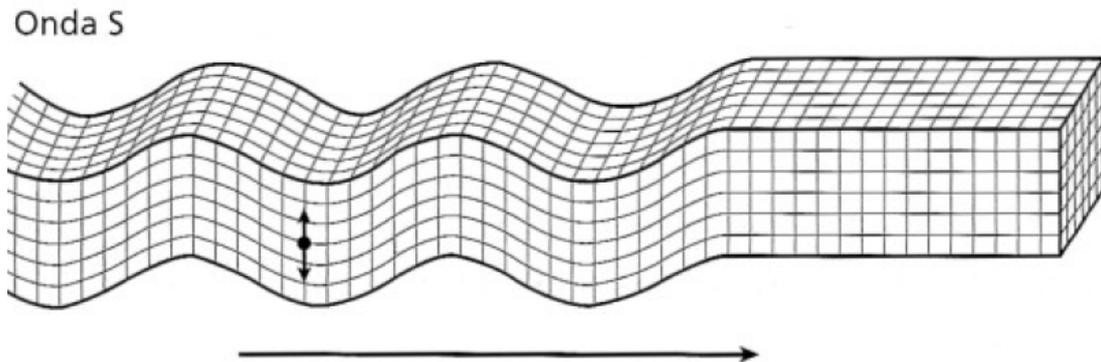


Figura 5: Esquema da perturbação perpendicular a direção de propagação da onda-S. Modificado de Kearey *et al.* (2002).

A velocidade da onda-S ( $\beta$ ) pode ser obtida a partir da relação :

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (2.18)$$

Outra relação importante é a razão de Poisson ( $\nu$ ) obtida a partir da velocidade da onda-P ( $\alpha$ ) e onda-S ( $\beta$ ), obtém-se:

$$\nu = \frac{\frac{\alpha^2}{\beta^2} - 2}{2[\frac{\alpha^2}{\beta^2} - 1]}. \quad (2.19)$$

## 2.2 Refletividade em um meio elástico

A refletividade em um meio elástico depende das velocidades compressivas, cisalhantes, densidade dos meios e do ângulo de incidência da onda.

### 2.2.1 Lei de Snell

A Lei de Snell (ou Lei de Snell-Descartes) é usada para descrever a relação entre o ângulo de incidência e os ângulos de reflexão e transmissão, quando uma onda passa por uma interface entre dois meios. A medida dos ângulos é feita em relação à normal, que é sempre perpendicular a superfície no ponto de incidência da onda. A relação que descreve a Lei de Snell é:

$$p = \frac{\sin(\theta_1)}{\alpha_1} = \frac{\sin(\theta_2)}{\alpha_2} = \frac{\sin(\phi_1)}{\beta_1} = \frac{\sin(\phi_2)}{\beta_2}, \quad (2.20)$$

no qual  $p$  é o parâmetro do raio,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  são as respectivas velocidades da onda-P nos meios 1 e 2,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são as respectivas velocidades da onda-S nos meios 1 e 2,  $\theta_1$  e  $\phi_1$  são os ângulos de incidência das ondas-P e S e  $\theta_2$ , e  $\phi_2$  são os ângulos de transmissão das ondas P e S. No Apêndice A é mostrada a dedução da Lei de Snell generalizada.

Podemos estimar o valor do ângulo  $\theta$  a partir do *offset*. Como a tangente do ângulo de incidência é a metade do *offset*  $X$  dividido pela profundidade  $Z$ , temos:

$$\tan(\theta) = \frac{X}{2Z}, \quad (2.21)$$

sendo  $Z = \frac{Vt_0}{2}$ , onde  $V$  é a velocidade na camada e  $t_0$  o tempo de percurso para incidência normal, a equação 2.21 torna-se:

$$\tan(\theta) = \frac{X}{Vt_0}, \quad (2.22)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{X}{Vt_0}\right). \quad (2.23)$$

A equação 2.23 é válida para uma camada, a relação que demonstra para diversas camadas é dada na equação 2.25:

$$\sin(\theta) = \frac{XV}{tV_{rms}}, \quad (2.24)$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{XV}{tV_{rms}}\right), \quad (2.25)$$

no qual  $V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$ ,  $V_m$  a velocidade média de todo o percurso do raio e  $t$  o tempo de percurso.

## 2.2.2 Equações de Zoeppritz

As bases para o entendimento da relação entre as ondas compressoriais, cisalhantes, densidade e ângulo de incidência são as equações de Zoeppritz (1919), que calculam as energias refletidas e transmitidas de uma onda plana incidente em uma

interface de dois meios diferentes. Seguindo a dedução do Apêndice A, temos o sistema matricial  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{N}$ , Sendo:

No qual  $\mathbf{M}$  é

$$\begin{bmatrix} -\sin \theta_1 & -\cos \phi_1 & \sin \theta_2 & \cos \phi_2 \\ \cos \theta_1 & -\sin \phi_1 & \cos \theta_2 & -\sin \phi_2 \\ (2\rho_1\beta_1 \sin \phi_1 \cos \theta_1) & \rho_1\beta_1(1 - 2\sin^2 \phi_1) & (2\rho_2\beta_2 \sin \phi_2 \cos \theta_2) & (\rho_2\beta_2(1 - 2\sin^2 \phi_2)) \\ (\rho_1\alpha_1)(1 - 2\sin^2 \phi_1) & (-\rho_1\beta_1 \sin 2\phi_1) & (-\rho_2\alpha_2)(1 - 2\sin^2 \theta_2) & (\rho_2\beta_2 \sin 2\phi_2) \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

no qual  $\mathbf{r}$  é

$$\begin{bmatrix} R_{pp} \\ R_{ps} \\ T_{pp} \\ T_{ps} \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

e  $\mathbf{N}$  é

$$\begin{bmatrix} \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \\ 2\rho_1\beta_1 \sin \phi_1 \cos \theta_1 \\ \rho_1\alpha_1(1 - 2\sin^2 \phi_1) \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

no qual  $R_{pp}$ ,  $R_{ps}$  são os coeficientes de refletividade da onda compressional e da onda cisalhante e  $T_{pp}$  e  $T_{ps}$  os coeficientes de transmissão da onda compressional e da onda cisalhante.

Fazendo a inversa de  $\mathbf{M}$  e multiplicando por  $\mathbf{N}$ , temos uma matriz com muitos termos, para simplificar, definem-se os termos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  como:

$$a = \rho_2(1 - 2\beta_2^2 p^2) - \rho_1(1 - 2\beta_1^2 p^2), \quad (2.29)$$

$$b = \rho_2(1 - 2\beta_2^2 p^2) + 2\rho_1\beta_1^2 p^2, \quad (2.30)$$

$$c = \rho_1(1 - 2\beta_1^2 p^2) + 2\rho_2\beta_2^2 p^2, \quad (2.31)$$

$$d = 2(\rho_2\beta_2^2 - \rho_1\beta_1^2). \quad (2.32)$$

Utilizando os termos acima apresentados, os coeficientes  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$ , e  $D$  ficam:

$$E = b \frac{\cos(\theta_1)}{\alpha_1} + c \frac{\cos(\theta_2)}{\alpha_2}, \quad (2.33)$$

$$F = b \frac{\cos(\phi_1)}{\beta_1} + c \frac{\cos(\phi_2)}{\beta_2}, \quad (2.34)$$

$$G = a - d \frac{\cos(\theta_1)}{\alpha_1} \frac{\cos(\phi_2)}{\beta_2}, \quad (2.35)$$

$$H = a - d \frac{\cos(\theta_2)}{\alpha_2} \frac{\cos(\phi_1)}{\beta_1}, \quad (2.36)$$

$$D = EF + GHp^2. \quad (2.37)$$

Assim, os coeficientes  $R_{pp}$ ,  $R_{ps}$ ,  $T_{pp}$  e  $T_{ps}$  ficam da forma:

$$\begin{bmatrix} R_{pp} \\ R_{ps} \\ T_{pp} \\ T_{ps} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\{ (b \frac{\cos(\theta_1)}{\alpha_1} - c \frac{\cos(\theta_2)}{\alpha_2}) F - (a + d \frac{\cos(\theta_1)}{\alpha_1} \frac{\cos(\phi_2)}{\beta_2}) Hp^2 \right\} \\ \frac{D}{-2 \frac{\cos(\theta_1)}{\alpha_1} (ab + cd \frac{\cos(\theta_2)}{\alpha_2} \frac{\cos(\phi_2)}{\beta_2}) p \alpha_1} \\ \frac{\beta_1 D}{2 \rho_1 \frac{\cos(\theta_1)}{\alpha_1} F \alpha_1} \\ \frac{\alpha_2 D}{2 \rho_1 \frac{\cos(\theta_1)}{\alpha_1}} \\ \frac{\alpha_1}{D} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

As duas primeiras linhas da matriz são os coeficientes de reflexão para a onda-P e a onda-S e os outros dois são seus respectivos coeficientes de transmissão. Esse tipo de estimativa é chamada de AVO multicomponente, Miranda (2007) usa uma inversão linear de AVO multicomponente na caracterização de um reservatório delgado, já Hamlyn (2014) usa apenas  $R_{pp}$  para estudar o efeito de *tunning* e camadas finas na análise AVO, usando uma abordagem similar ao presente trabalho.

### 2.2.3 Aproximação de Aki e Richards

As equações de Zoeppritz são não-lineares e complexas, sendo em alguns casos por ser de difícil implementação e de alto custo computacional.

Aki e Richards (1980) aproximam as equações partindo da hipótese de que não há grande variação nas propriedades entre os semi-espacos, para as condições em que os ângulos  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são reais e são menores que o ângulo crítico, no qual o ângulo crítico é ângulo de incidência necessário para que ocorra apenas transmissão, que pode ser calculado usando a Lei de Snell. Utilizando:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \tan(\theta_1) \frac{\Delta\alpha}{\alpha}, \quad (2.39)$$

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \tan(\phi_1) \frac{\Delta\beta}{\beta}, \quad (2.40)$$

no qual  $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$  e  $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$ .

Expandindo e substituindo os termos de  $R_{pp}$ , mantendo em função de  $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ ,  $\frac{\Delta\beta}{\beta}$  e  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ , a aproximação para  $R_{pp}$  fica:

$$R_{pp} = \frac{1}{2}(1 - 4\beta^2 p^2) \frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{1}{2 \cos^2(\theta)} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - 4\beta^2 p^2 \frac{\Delta\beta}{\beta}, \quad (2.41)$$

no qual  $\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ ,  $\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$ ,  $\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$  e  $\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ .

A equação se torna bem útil, uma vez que é mais simples e linear que a solução completa.

### 2.2.4 Aproximação de Shuey

Shuey (1985) utiliza outra aproximação da equação de Zoeppritz, tal aproximação ressalta que o coeficiente de Poisson dos meios era o fator que controlava a refletividade. Derivando a aproximação de Aki e Richards (1980), o coeficiente  $R_{pp}$  torna-se:

$$R_{pp} = R_0 + \left[ A_0 R_0 + \left( \frac{\Delta v}{1 - v^2} \right) \right] \sin^2(\theta) + \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} (\tan^2(\theta) - \sin^2(\theta)), \quad (2.42)$$

no qual  $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$  e  $\Delta v = v_2 - v_1$ ,  $R_0$  é o coeficiente de reflexão na incidência normal e  $A_0$  o gradual decaimento da amplitude com o ângulo, representado por:

$$A_0 = B - 2(1 + B) \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \quad (2.43)$$

$$\text{onde } B = \frac{\frac{\Delta\alpha}{\alpha}}{\frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\rho}{\rho}}.$$

Para ângulos  $\theta < 30^\circ$ , uma forma muito útil da equação de Shuey (1985) utilizada por Avseth *et al.* (2005) é mostrada na equação 2.44 que coloca a refletividade uma função como uma função de  $I$  e  $G$ , onde  $I$  é a refletividade no ângulo nulo e  $G$  é chamado de gradiente.

$$R(\theta) \approx I + G \sin(\theta), \quad (2.44)$$

no qual:

$$I = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\beta}{\beta} \right) \quad (2.45)$$

e

$$G = \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - 2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left( \frac{\Delta\rho}{\rho} + 2 \frac{\Delta\beta}{\beta} \right). \quad (2.46)$$

## 2.2.5 Modelagem acústica

Existem duas considerações sobre o comportamento dos materiais para a modelagem acústica, descritos pelos comportamentos elásticos e viscoelásticos. Os materiais elásticos obedecem a Lei de Hooke, retornando ao ponto de origem após a deformação sem dissipar a energia da onda que o atravessa. Já no caso viscoelástico, o corpo também retorna à sua posição mas o mesmo dissipa parte da energia da onda e apresenta velocidades diferenciadas para cada frequência diferente do pulso, havendo que adicionar os efeitos de atenuação e dispersão.

Para explicar os termos mencionados anteriormente, primeiro trataremos do conceito de impedância acústica, dada pela seguinte relação:

$$Z = \rho\alpha, \quad (2.47)$$

no qual  $Z$  é a impedância acústica,  $\rho$  a densidade e  $\alpha$  a velocidade na camada. Logo

se chega na seguinte relação:

$$R(\theta = 0) = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{\rho_2\alpha_2 - \rho_1\alpha_1}{\rho_2\alpha_2 + \rho_1\alpha_1}, \quad (2.48)$$

no qual  $T$  é dado por:

$$T = 1 - R = \frac{2Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{2\rho_1\alpha_1}{\rho_2\alpha_2 + \rho_1\alpha_1}. \quad (2.49)$$

## 2.3 Tipos de Anomalias AVO

Rutherford e Williams (1989) propuseram a classificação das anomalias AVO, as dividindo em três classes que são baseadas nas respostas de um reservatório de gás arenítico.

As classes são divididas em:

1. Classe I - Arenitos de alta impedância: O reservatório possui uma impedância muito maior que o selo, geralmente composto de folhelho. Tal situação ocorre em um arenito maduro que sofreu um acentuado processo de compactação. A refletividade para *offset* zero possui um alto valor, porém vai sua amplitude vai diminuindo conforme se aumenta o *offset* podendo até haver inversão de polaridade no caso de ângulos/*offsets* muito grandes.
2. Classe II - Arenitos com baixíssimo contraste de impedância: O arenito possui impedância próxima ao selo, sendo geralmente compactado e consolidado. Devido ao pequeno gradiente de impedância, a refletividade para incidência normal é quase nula e por isso dificilmente detectada na presença de ruídos. Estas anomalias possuem gradiente alto e possuem altos valores na refletividade para os ângulos/*offsets* altos.
3. Classe III - Arenitos de baixa impedância: O arenito possui uma impedância menor que o selo, podendo ser inconsolidado e de pouca compactação. Estas anomalias apresentam alta refletividade para incidência normal que aumenta gradativamente com os *offsets*, apresentando grandes anomalias de amplitude nos dados empilhados. Como seu gradiente normalmente é baixo, não há muita diferença conforme se aumenta o *offset*.

Castagna e Backus (1993) propuseram um gráfico do gradiente pelo intercepto para

separar as anomalias baseadas em seus quadrantes, como mostra a Figura 6.

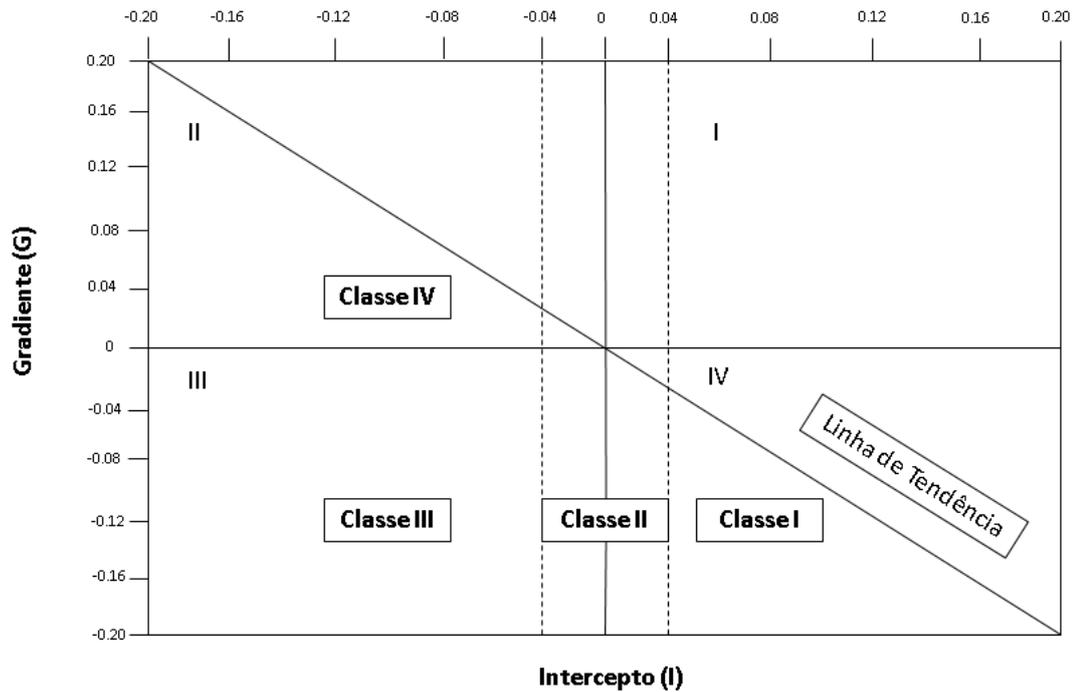


Figura 6: Gráfico do gradiente pelo intercepto com a subdivisão de quadrantes e a localização das anomalias AVO em cada região do gráfico. (Adaptado de Castagna e Swan (1997)).

Tal classificação é idêntica à de Rutherford e Williams (1989), com a diferença da adição da Classe IV, que representam arenitos de baixa impedância em que o módulo da amplitude diminui com o aumento do *offset*, chamado de falso negativo. Tal fenômeno ocorre devido a uma camada de altíssima velocidade que sobrepõe o reservatório.

A tabela 2 representa o comportamento das anomalias AVO, expressando as classes com base em suas características.

Tabela 2: Representação do quadrante, do sinal do intercepto, do sinal do gradiente e da variação da amplitude com o espaçamento das classes de anomalia AVO. (Modificado a partir de Castagna e Swan (1997)).

Classe	Impedância Relativa	Quadrante	Intercepto	Gradiente	Varição da amplitude com o espaçamento
I	Maior que a camada superior	IV	Positivo	Negativo	Decrescente
II	Quase a mesma que a camada superior	II, III, ou IV	Positivo ou Negativo	Negativo	Crescente ou Decrescente, podendo inverter polaridade.
III	Menor que a camada superior	III	Negativo	Negativo	Crescente
IV	Menor que a camada superior	II	Negativo	Positivo	Decrescente

Uma forma muito útil e esclarecedora é fazer um gráfico da amplitude sísmica pelo ângulo de incidência no topo do reservatório, pois cada classe de anomalia AVO seguirá uma tendência de crescimento ou decrescimento, como mostra a Figura 7.

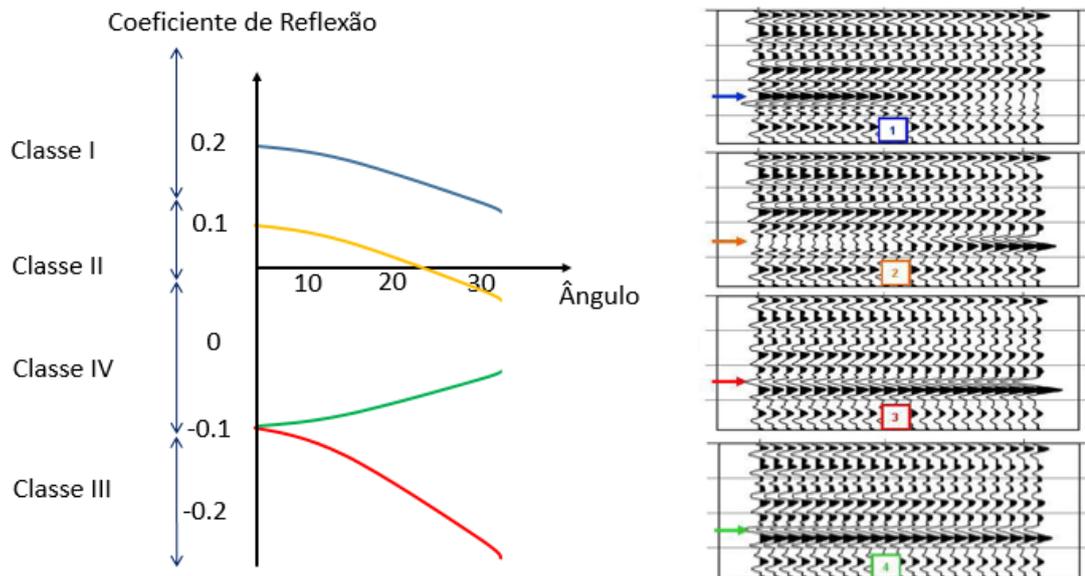


Figura 7: Gráfico representando a variação da amplitude com relação ao ângulo de incidência, as cores e os números representam as respectivas anomalias do AVO.

Como a variação de amplitude pode ser difícil de ser reconhecida visualmente, tal gráfico ajuda a identificar o tipo de classe da anomalia de AVO com precisão baseado em sua amplitude inicial e sua variação.

## 2.4 Princípio de Huygens e difração

O princípio de Huygens diz que toda frente de onda serve como fonte para geração de novas frentes de onda, auxiliando no entendimento dos fenômenos de reflexão, refração e difração. Por exemplo, quando frentes de onda encontram uma superfície, o local deste ponto pode ser interpretado como uma fonte secundária da reflexão e da refração (Figura 8).

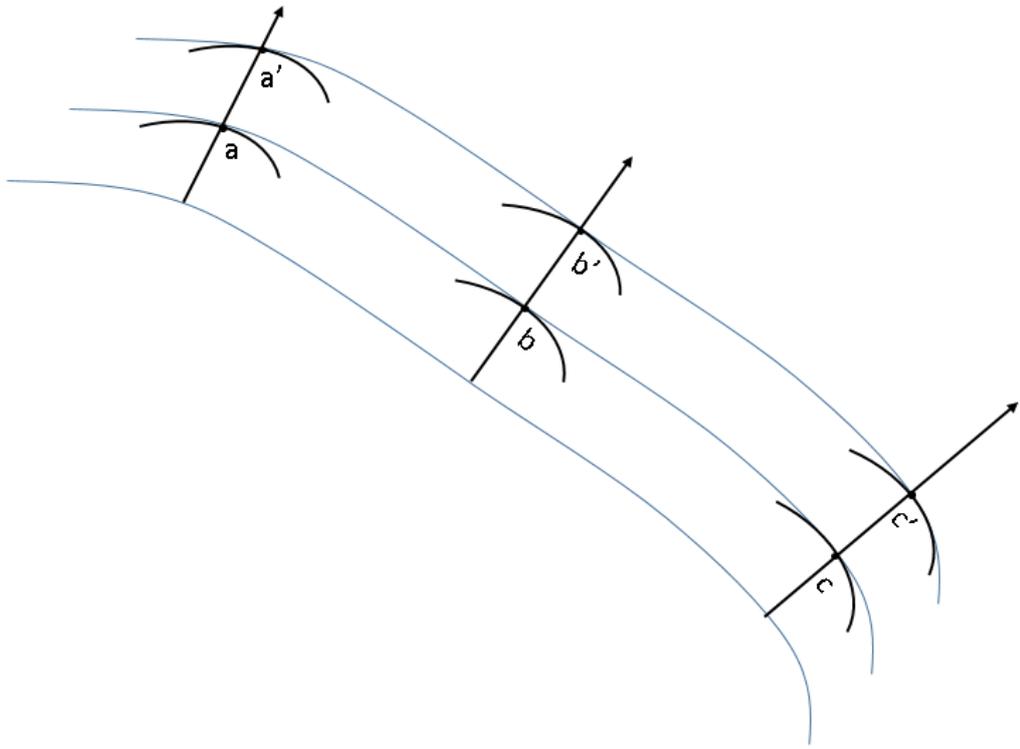


Figura 8: Ilustração do princípio de Huygens, sendo os pontos  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$ ,  $c$  e  $c'$  fontes pontuais secundárias para novas frentes de ondas. (Adaptado de Alonso e Finn (1967)).

Se a superfície de um obstáculo é suficientemente pequena em relação ao comprimento de onda, o pulso tende a contorná-lo. Caso contrário, em situações como falhas, *pinchouts* e discordâncias o ponto irá irradiar as frentes de onda, obedecendo o princípio de Huygens como ilustra a Figura 9.

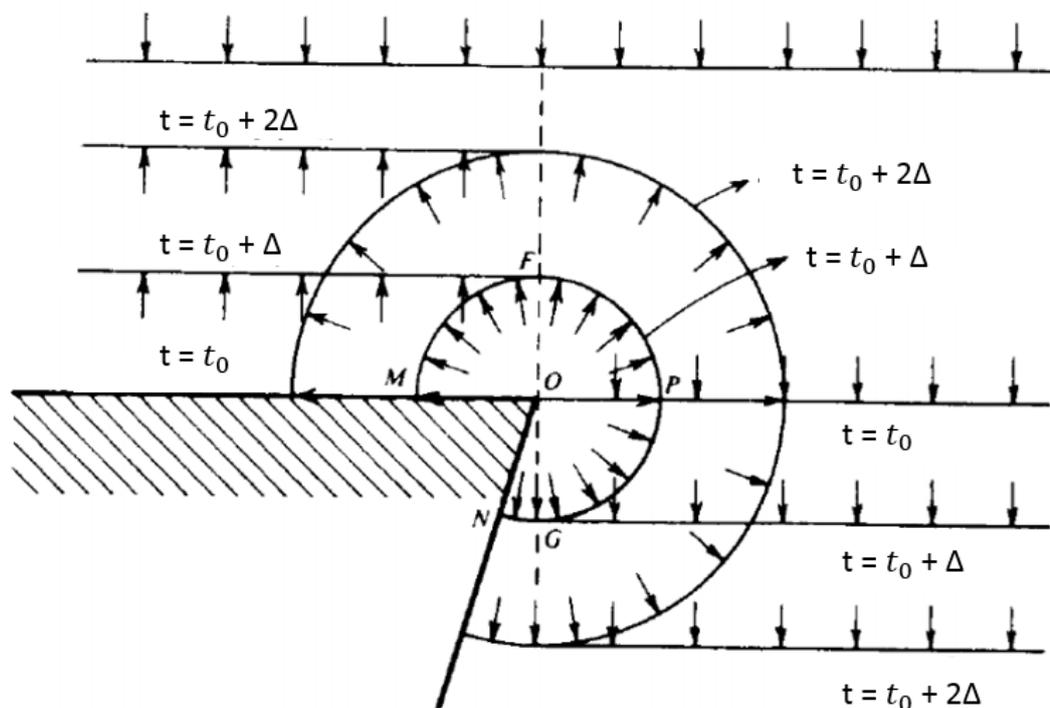


Figura 9: Ilustração das frentes de onda plana sofrendo difração ao encontrar uma falha. (Modificado de Sheriff e Geldart (1995)).

### 2.4.1 Interferência entre ondas

Quando duas ondas diferentes que estão viajando se encontram, o resultado é uma soma das amplitudes na interseção dos pulsos. Isto acarreta em interferência construtiva, quando ambas as amplitudes mesma polaridade, e em interferência destrutiva, quando as amplitudes possuem polaridades diferentes. A importância deste fenômeno é devido o receptor (geofone ou hidrofone) apenas conseguir fazer a leitura do pulso resultante naquele instante de tempo, podendo ofuscar ou interferir eventos de interesse.

### 2.4.2 Espalhamento geométrico

Uma onda que viaja pela subsuperfície, tem sua energia distribuída através da superfície da onda. Existem dois tipos de espalhamentos ou divergências mais empregados, a divergência cilíndrica e a divergência esférica. Este trabalho apenas tratará da divergência esférica.

O deslocamento de uma onda senoidal pode ser representado por:

$$d = A_0 \cos(\omega t + \phi_0). \quad (2.50)$$

no qual  $d$  é o deslocamento,  $A_0$  é a amplitude máxima,  $\omega$  a frequência e  $\phi_0$  é a fase.

A velocidade ( $Vel$ ) é definida como a derivada do deslocamento em relação ao tempo. A energia cinética ( $E_c$ ) é o produto da massa pela velocidade ao quadrado dividido por dois, ficando da forma:

$$Vel = \frac{\delta d}{\delta t}, \quad (2.51)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m Vel^2. \quad (2.52)$$

no qual  $m$  é a massa.

Como  $\frac{\delta d}{\delta t} = -A_0 \omega \sin(\omega t + \phi_0)$ , a equação 2.52 torna-se:

$$E_c = \frac{1}{2} m A_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi_0). \quad (2.53)$$

Usando a relação de que a densidade é razão da massa pelo volume ( $\rho = \frac{m}{V}$ ), e analisando a componente infinitesimal da energia  $\delta E_c$  da componente do volume  $\delta V$ , a equação 2.53 torna-se:

$$\delta E_c = \frac{1}{2} \rho \delta V A_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi_0). \quad (2.54)$$

A definição de espalhamento está ligada com o conceito de densidade de energia, que relaciona a energia  $D$  da onda por unidade de volume:

$$D = \frac{E}{V}. \quad (2.55)$$

Logo, a partir da equação 2.54, temos a densidade de energia de uma onda esférica em módulo dada por:

$$\frac{\delta E_c}{\delta V} = \frac{1}{2} \rho A_0^2 \omega^2. \quad (2.56)$$

A relação para a potência é dada por  $P = I.S$ . No qual  $I$  é a intensidade e  $S$  é a área. Partindo do princípio que o meio é elástico, a energia para a posição inicial deve

ser igual a energia na posição final.

$$P_{inicial} = P_{final}, \quad (2.57)$$

e

$$I_{inicial}S_{inicial} = I_{final}S_{final}, \quad (2.58)$$

logo:

$$\frac{S_{inicial}}{S_{final}} = \frac{I_{final}}{I_{inicial}}. \quad (2.59)$$

A área de uma onda esférica é  $A = 4\pi r^2$ , no qual  $r$  é o raio. Assumindo que o corpo em que a onda viaja é isotrópico e não há perda de energia, a equação 2.59 torna-se:

$$\frac{r_{inicial}^2}{r_{final}^2} = \frac{A_{final}^2}{A_{inicial}^2}, \quad (2.60)$$

com:

$$\frac{r_{inicial}}{r_{final}} = \frac{A_{final}}{A_{inicial}}. \quad (2.61)$$

Como a amplitude e o raio inicial são constantes, a equação 2.61 mostra que a amplitude varia com o inverso do raio em casos de divergência esférica. Tal fenômeno deve ser corrigido no dado sísmico. Normalmente a perda devido ao espalhamento é expressa em decibéis  $dB$ :

$$dB = 10 \log\left(\frac{I_{final}}{I_{inicial}}\right). \quad (2.62)$$

### 2.4.3 Atenuação e dispersão

A atenuação é toda a perda de energia da onda sísmica ao se propagar em meio viscoelástico. Isto ocorre porque os meios não são perfeitamente elásticos e dissipam energia na forma de calor. Este fenômeno é indesejado, causando uma diminuição do conteúdo de frequência e queda de amplitude no dado sísmico. A dispersão ocorre porque em um meio dissipativo as componentes de alta frequência possuem veloci-

dades diferentes das componentes de baixa frequência. Ao estudar estes fenômenos, pode-se tentar recuperar parte do conteúdo de frequências perdido. Isto causa mudança na forma da onda a medida que ela se propaga. A atenuação e a dispersão estão intimamente ligadas (TOKSOZ; JOHNSTON, 1981).

Assumindo um meio pouco dissipativo, pode-se usar as relações de Cerveny (2001) para representar a velocidade,  $V(\omega)$ :

$$V(\omega) = V^R(\omega)\left(1 - \frac{i}{Q(\omega)}\right), \quad (2.63)$$

no qual  $V^R$  é a parte real da velocidade e  $Q(\omega)$  é o fator de qualidade de um meio, no qual é inversamente proporcional a atenuação. A partir disto, a expressão da propagação da onda fica:

$$U(\tau, \omega) = U_0(\omega)e^{i\omega\left(\tau - \frac{x}{V^R(\omega)}\right)}e^{\frac{-\omega x}{2V^R(\omega)Q(\omega)}}, \quad (2.64)$$

no qual  $\tau$  é o tempo duplo de viagem da onda em uma camada,  $x$  é a distancia percorrida. O primeiro e o segundo termos no primeiro exponencial sendo responsáveis pela propagação e a dispersão, respectivamente, e o segundo exponencial responsável pelo efeito da atenuação.

Uma abordagem é adotar o modelo Kjartansson (1979), que considera um valor para o fator de qualidade  $Q$  independente da frequência, podendo reescrever a equação 2.64 da forma:

$$U(\tau, \omega) = U_0(\omega)e^{i\omega\tau}e^{\frac{-\omega\pi}{2Q}}, \quad (2.65)$$

no qual  $\tau = \frac{x}{V^r(\omega)}$ .

Quando o fator de qualidade da rocha é conhecido, pode-se utilizar um filtro inverso  $Q$ . Tal filtro busca compensar os efeitos de atenuação e dispersão baseado na extrapolação da onda usando a teoria da continuidade descendente. Tal abordagem oferece: melhor amarração sísmica-poço, melhor resolução sísmica e melhor caracterização do reservatório.

Lupinacci e Oliveira (2015) propuseram dois métodos para estimativa do fator  $Q$  e avaliaram estes métodos com o método proposto por Wang (2008). Eles concluíram que o método de Wang (2008) foi robusto o suficiente para ser aplicado automaticamente traço a traço para encontrar o fator  $Q$ .

Lupinacci *et al.* (2017) propuseram diferentes fluxos para a correção do efeito da atenuação em dados sísmicos, mostrando a importância da utilização de filtros tempo-frequência para obter dados com uma maior resolução sísmica e maior razão sinal-ruído.

### 3 Metodologia

Na primeira etapa deste trabalho foram criados quatro modelos geológicos para simular diferentes cenários de reservatório. Os modelos são basicamente compostos de cinco camadas plano-paralelas, com o reservatório possuindo diferentes valores de velocidades compressoriais e cisalhantes em cada um. A Figura 10 mostra a configuração do modelo geológico, sendo composto de duas camadas arbitrárias, rocha selante, rocha reservatório e a rocha geradora.



Figura 10: Configuração do modelo geológico utilizado.

Na segunda etapa, realizou-se a modelagem do dado pós-empilhamento. Estes dados foram modelados considerando ausência e presença ruído, e com os efeitos da atenuação e dispersão. Os dados pós-empilhamento foram modelados considerando uma incidência normal em um meio elástico e posteriormente em um meio viscoelástico. Considerando que todas as etapas de um processamento sísmico tais como correção esférica, análise de velocidade, migração, entre outras já foram realizadas.

### 3.1 Modelagem dos dados pós-empilhamento

Para a modelagem dos dados pós-empilhamento, construi-se uma matriz com os valores de velocidades compressoriais e densidades. A matriz de refletividade foi obtida fazendo o contraste de impedância em cada termo da matriz do modelo. Uma vez com a matriz de refletividade e o pulso sísmico definidas. Foi usado o modelo convolucional para obter a resposta sísmica. A Figura 11 mostra o pulso sísmico, a função de refletividade e o traço sísmico modelado.

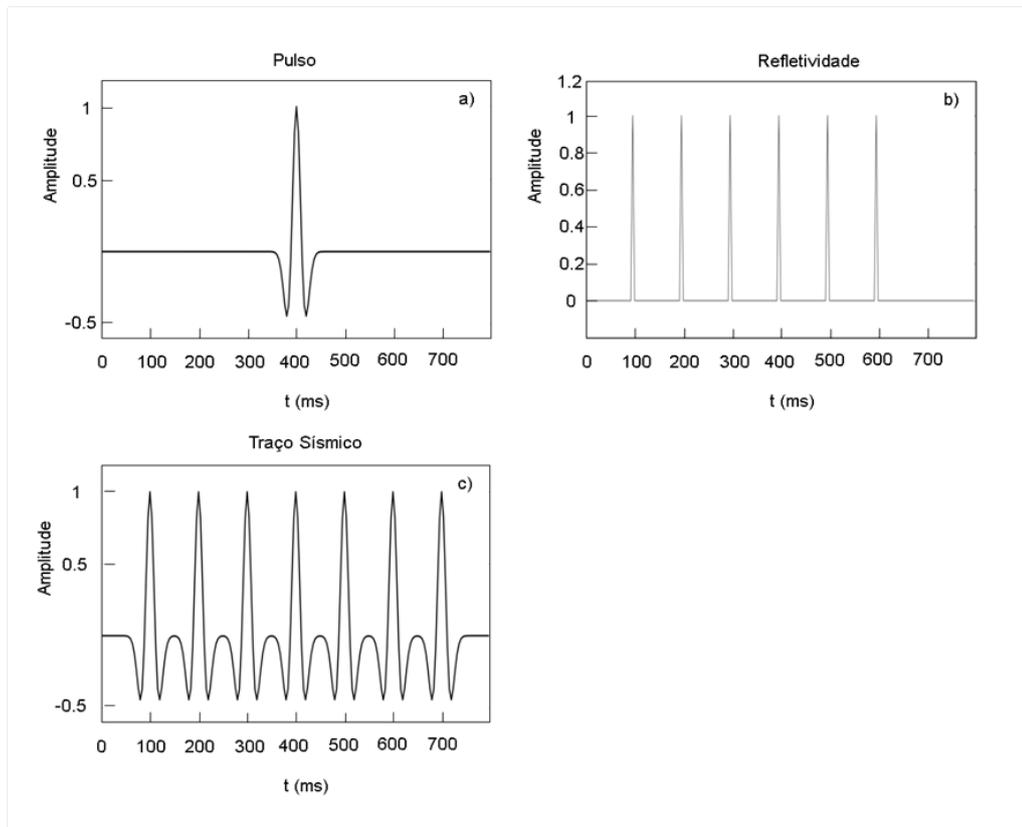


Figura 11: a) Pulso sísmico. b) Função de refletividade. c) Traço sísmico modelado.

Para adicionar os efeitos de atenuação e dispersão, utilizou-se um modelo similar ao proposto por Oliveira e Lupinacci (2013). A modelagem foi feita no domínio da frequência utilizando a seguinte equação:

$$S(\omega) = w(\omega) \sum_{k=1}^N R_k e^{-ki\omega\tau + a_k(\omega)} \quad (3.1)$$

no qual  $S(\omega)$  é traço sísmico no domínio da frequência,  $w(\omega)$  o pulso sísmico no domínio da frequência,  $r_k$  é a refletividade na  $k$ -ésima interface,  $\tau$  é o tempo duplo de trânsito do pulso em uma camada,  $\omega$  é a frequência angular,  $a_k$  é o termo que cor-

responde dos efeitos de atenuação e dispersão e  $N$  é o número de interfaces. Para adicionar estes efeitos, considera-se o modelo do fator  $Q$  constante de Kjartansson (1979):

$$a_k = \omega\tau \left( i \ln\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) - 1 \right) \sum_{k=1}^N \frac{1}{Q_k}, \quad (3.2)$$

no qual  $\omega_0 =$  é uma frequência de referência e  $Q_k$  é o fator de qualidade na  $k$ -ésima interface. Nesta equação, a parte real corresponde ao efeito da atenuação e a imaginária corresponde ao efeito de dispersão.

Como a função do pulso é discreta, pode-se utilizar a multiplicação na equação 3.1 como uma multiplicação de matrizes da forma  $\mathbf{S}=\mathbf{M}\cdot\mathbf{R}$ , sendo  $\mathbf{S}$  o traço sísmico e  $\mathbf{M}$  a matriz de modelagem direta obtida e  $\mathbf{R}$  a refletividade. Isto torna-se:

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 e^{-i\omega\tau+a_1(\omega_1)} & w_1 e^{-2i\omega\tau+a_2(\omega_2)} & \dots & w_1 e^{-ki\omega\tau+a_k(\omega_k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n e^{-i\omega\tau+a_1(\omega_1)} & w_n e^{-2i\omega\tau+a_2(\omega_2)} & \dots & w_n e^{-ki\omega\tau+a_k(\omega_k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ R_k \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

A modelagem dos dados pré-empilhamento foi feita a partir dos valores de velocidade compressional, velocidade cisalhante e densidade dos modelos geológicos criados. De forma similar a modelagem de dados pós-empilhamento, usa-se o modelo convolucional, convolvendo a matriz de refletividade com o pulso sísmico.

A matriz de refletividade foi obtida a partir da equação de Zoeppritz, a aproximação de Aki e Richards (1980) e a aproximação de Shuey (1985) a cada dois termos da matriz, obtendo assim, uma matriz de refletividade para cada ângulo de incidência. Após obter a matriz de refletividade, convolveu-se a matriz de refletividade com o pulso gerando uma série de *gathers*.

## 4 Resultados e Considerações

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos a partir do uso da metodologia apresentada no capítulo anterior. Para isto, primeiro são mostrados os modelos geológicos e depois as modelagens acústica e elástica.

### 4.1 Modelos Geológicos

Os modelos se diferenciam quanto as velocidades das rochas selante, reservatório e geradora. Para facilitar a compreensão, os modelos foram agrupados para representar cada tipo de anomalia AVO. As tabelas 3, 4, 5 e 6 mostram as características dos modelos 1, 2, 3 e 4, respectivamente.

Tabela 3: Dados das velocidades-P, velocidades-S, densidades e espessuras das camadas do Modelo 1.

Modelo 1	Velocidade-P (m/s)	Velocidade-S (m/s)	Densidade (g/cm <sup>3</sup> )	Espessura (m)
Camada 1	2300	1035	1.8	200
Camada 2	2500	1215	2.29	500
Rocha Selante	2800	1244	2.3	300
Rocha Reservatório	3200	1700	2.4	100
Rocha Geradora	2800	1244	2.3	300

Tabela 4: Dados das velocidades-P, velocidades-S, densidades e espessuras das camadas do Modelo 2.

Modelo 2	Velocidade-P (m/s)	Velocidade-S (m/s)	Densidade (g/cm <sup>3</sup> )	Espessura (m)
Camada 1	2300	1035	1.8	200
Camada 2	2500	1215	2.29	500
Rocha Selante	2800	1350	2.3	300
Rocha Reservatório	2820	1500	2.25	100
Rocha Geradora	2800	1350	2.3	300

Os modelos 1 e 2 tiveram suas velocidades compressoriais, velocidades cisalhantes e densidades baseados em valores aproximados de velocidades em rochas selantes, reservatórios e geradoras, afim de representar com confiança as anomalias das Classes I e II, respectivamente.

Tabela 5: Dados das velocidades-P, velocidades-S, densidades e espessuras das camadas do Modelo 3.

Modelo 3	Velocidade-P (m/s)	Velocidade-S (m/s)	Densidade (g/cm <sup>3</sup> )	Espessura (m)
Camada 1	2300	1035	1.8	200
Camada 2	2500	1215	2.29	500
Rocha Selante	3048	1244	2.4	300
Rocha Reservatório	2438	1625	2.14	100
Rocha Geradora	3048	1244	2.4	300

No Modelo 3 usou-se a abordagem de Ostrander (1984), empregando os valores de velocidade compressional, velocidade cisalhante e densidade das camadas afim de replicar uma anomalia AVO de Classe III.

Tabela 6: Dados das velocidades-P, velocidades-S, densidades e espessuras das camadas do Modelo 4.

Modelo 1	Velocidade-P (m/s)	Velocidade-S (m/s)	Densidade (g/cm <sup>3</sup> )	Espessura (m)
Camada 1	2300	1035	1.8	200
Camada 2	2900	1330	2.29	500
Rocha Selante	3250	1780	2.44	300
Rocha Reservatório	2540	1620	2.09	100
Rocha Geradora	2900	1330	2.44	300

No Modelo 4 usou-se a abordagem de Castagna e Swan (1997), onde o reservatório é sobreposto pelo folhelho selante mas também por uma camada de arenito com salmoura de altíssima velocidade compressional, velocidade cisalhante e densidade. As velocidades no artigo de Castagna e Swan (1997) foram usadas com a intenção replicar uma anomalia de Classe IV no modelo.

## 4.2 Modelagem viscoacústica

Como mencionado no Capítulo 3, utilizou-se o modelo convolucional para obter a resposta sísmica dos modelos mencionados anteriormente. Para obter a resposta sísmica, foi usado um pulso sísmico com uma frequência central de 20 Hz a uma

frequência de amostragem de 4 ms. Posteriormente este pulso foi convolvido com a função refletividade. A Figura 12 mostra o pulso sísmico e o seu espectro de frequência

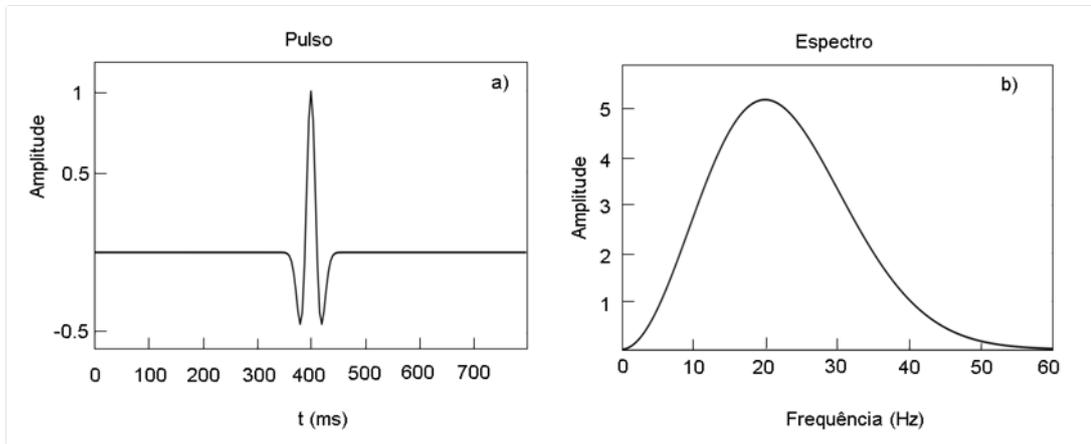


Figura 12: a) Pulso sísmico em relação ao tempo. b) Espectro de frequência.

#### 4.2.1 Respostas sísmicas para o Modelo 1

A partir da convolução do pulso sísmico com a refletividade, obteve-se uma resposta sísmica similar a dados pós-empilhamento (Figura 13).

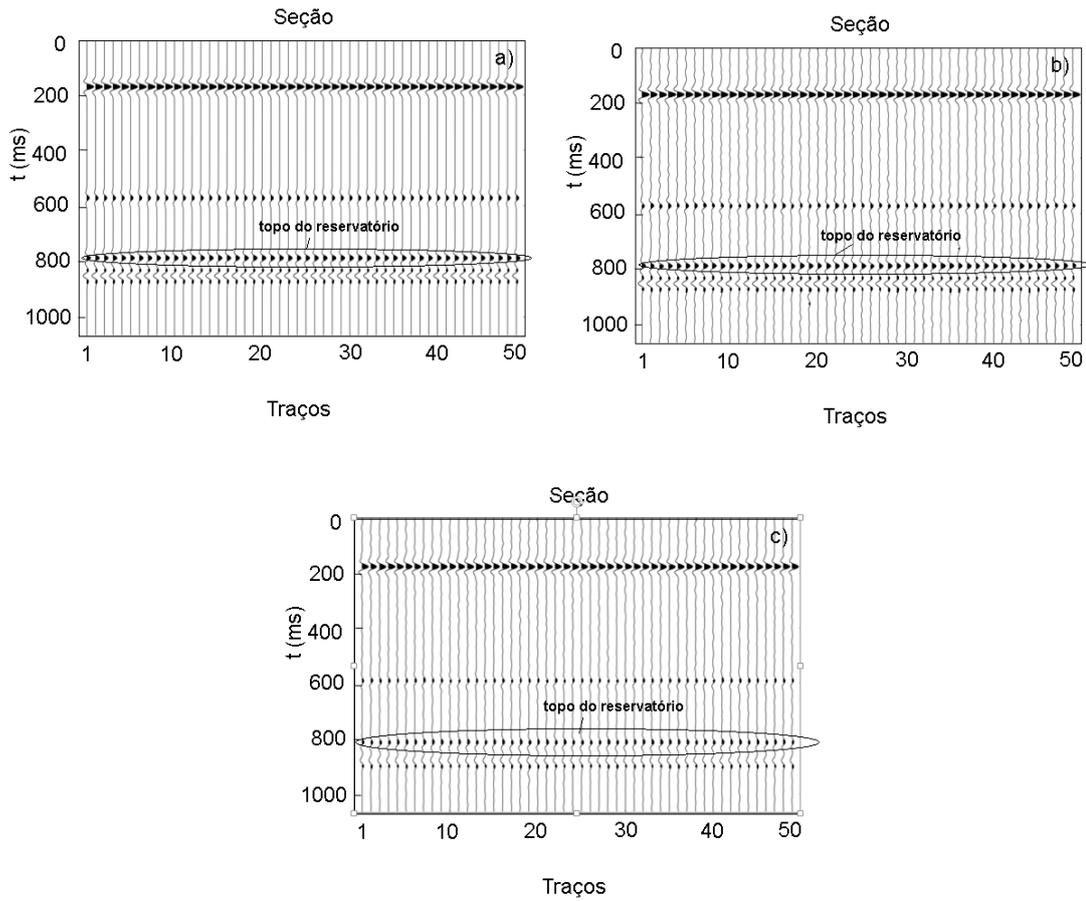


Figura 13: Resposta sísmica obtida para o Modelo 1: a) Sem ruído. b) Com ruído (gaussiano normalmente distribuído). c) Com ruído e os efeitos de atenuação e dispersão.

Na Figura 13.a, percebe-se uma sucessão de reflexões positivas, representando um aumento na variação das impedâncias das camadas conforme a profundidade até chegar a camada da rocha geradora, que possui impedância acústica menor que a camada do reservatório.

Para deixar a resposta sísmica mais realista, adicionou-se à refletividade um ruído gaussiano normalmente distribuído com desvio padrão de dois por cento da refletividade máxima. Pode-se notar que fica difícil se distinguir as interfaces nas camadas de baixa impedância acústica (Figura 13.b).

Deixando o modelo mais realista ainda, pode-se introduzir os efeitos de atenuação e dispersão ao longo dos traços. Para adicionar os efeitos de atenuação e dispersão, assume-se que todas as rochas possuem fator de qualidade  $Q = 100$  (Figura 13.c).

Nota-se que os efeitos da atenuação é maior com o aumento da profundidade, por ser um efeito acumulativo na propagação da onda. Este dado modelado mostra

como os efeitos de atenuação e dispersão afetam diretamente a interpretação de tais eventos. Neste caso, mostra o primeiro refletor com facilidade, porém o picos subsequentes passam amplitude pequena e passam a perder a forma, deixando a dúvida sobre a polaridade da reflexão, como é o caso da última reflexão.

## 4.2.2 Respostas sísmicas para o Modelo 2

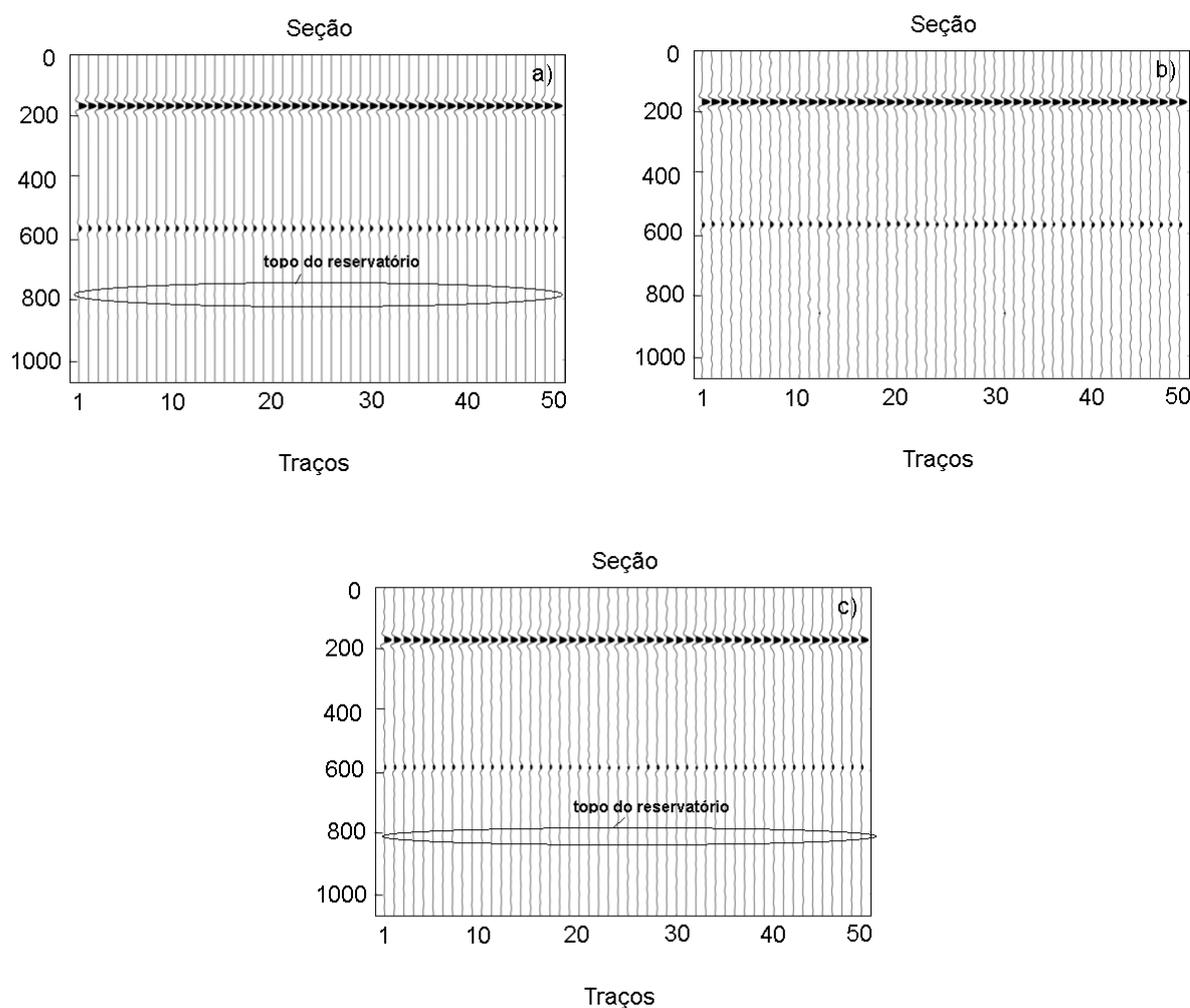


Figura 14: Resposta sísmica obtida para o Modelo 2: a) Sem ruído. b) Com ruído (gaussiano normalmente distribuído). c) Com ruído e os efeitos de atenuação e dispersão.

Os resultados da modelagem dos dados usando o Modelo 2 é apresentado na Figura 14. Nota-se que, diferente do Modelo 1, não é possível identificar o pico de amplitude no reservatório e na rocha geradora. Isto se deve ao fato de que na modelagem acústica leva-se em consideração apenas a velocidade compressional e a densidade, que possuem pouco contraste neste segundo modelo. A identificação de

tais camadas se torna impossível na presença de ruído, uma vez que a amplitude do ruído é maior que a resposta sísmica e, conseqüentemente, a amplitude do ruído irá sobrepor a amplitude da resposta.

Ao acrescentar os efeitos de atenuação e dispersão, torna-se ainda mais difícil de visualizar as interfaces das camadas (Figura 14.c). Neste caso percebe-se que ainda é possível identificar as três interfaces, mesmo com efeitos atuantes de atenuação e dispersão.

### 4.2.3 Respostas sísmicas para o Modelo 3

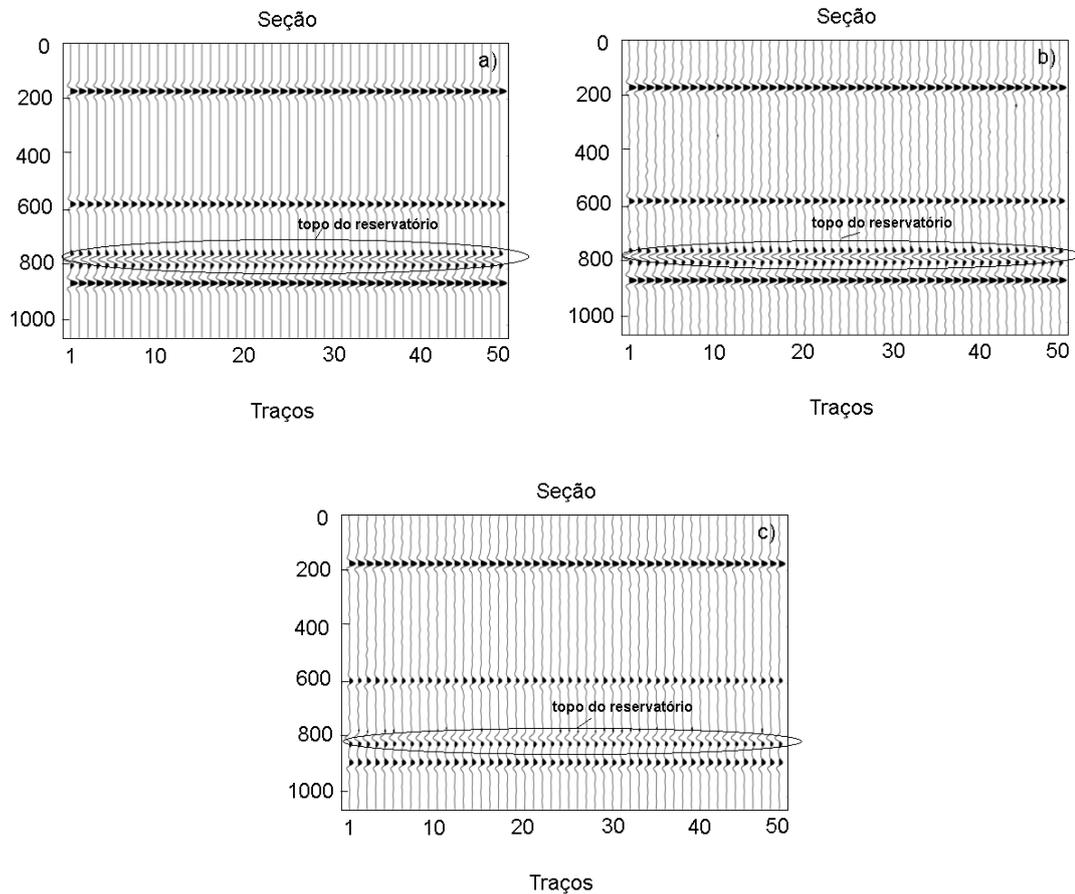


Figura 15: Resposta sísmica obtida para o Modelo 3: a) Sem ruído. b) Com ruído (gaussiano normalmente distribuído). c) Com ruído e os efeitos de atenuação e dispersão.

Nota-se que há um pico fortíssimo negativo no topo do reservatório, indicando uma alta diminuição da impedância acústica, e uma subsequente aumento na amplitude demonstrando um aumento na impedância acústica pós reservatório.

Ao adicionar o ruído, ainda é possível visualizar as interfaces das camadas, devido o contraste de impedância (Figura 15.b). E ao adicionar os efeitos de atenuação e dispersão também é possível separar as interfaces, mas como a mudança da forma do pulso variou com a profundidade, não é possível determinar se a reflexão tem polaridade positiva ou negativa (Figura 15.c).

#### 4.2.4 Respostas sísmicas para o Modelo 4

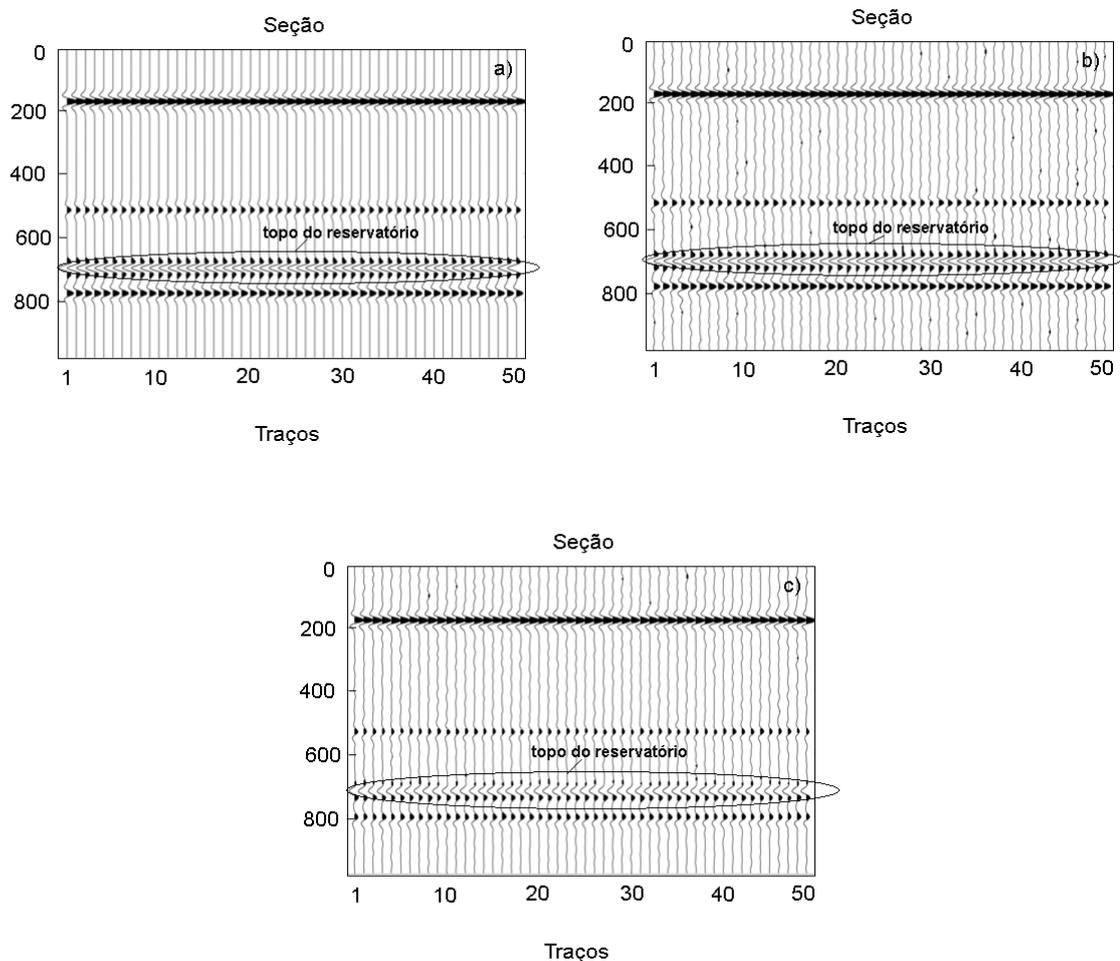


Figura 16: Resposta sísmica obtida para o Modelo 4: a) Sem ruído. b) Com ruído (gaussiano normalmente distribuído). c) Com ruído e os efeitos de atenuação e dispersão.

Pode-se observar que o resultado é muito similar ao Modelo 3, uma vez que o reservatório tem menor impedância acústica que a camada superior. No entanto, sabe-se que os dois modelos tem inúmeras diferenças, especialmente na velocidade cisalhante, mas que não podem ser percebidas na modelagem viscoacústica.

Ao adicionar o ruído, ainda é possível identificar as interfaces com relativa facilidade, não afetando a interpretação das mudanças de camadas (Figura 16.b). E ao adicionar os efeitos de atenuação e dispersão obtém-se um resultado similar aos outros modelos, onde as reflexões das interfaces do topo e base do reservatório acabam perdendo a forma e impossibilitando o reconhecimento da polaridade (Figura 16.c).

## 4.3 Modelagem elástica

Na modelagem elástica, os modelos podem se tornar mais diferenciáveis, levando a um melhor entendimento do reservatório, identificando perfeitamente as classes de anomalia AVO. Para facilitar o entendimento, cada modelo foi ajustado para obter as anomalia AVO.

A abordagem desse trabalho foi utilizar a equação de Zoeppritz e as aproximações de Aki e Richards (1980) e Shuey (1985) para avaliar o impacto de utilizar tais aproximações ao invés da equação de Zoeppritz para cada caso. A modelagem dos *gather*s considerou a faixa de  $0^{\circ}$  a  $30^{\circ}$  e um passo de  $5^{\circ}$  dos ângulos de incidência.

### 4.3.1 Modelagem Elástica para o Modelo 1

As respostas sísmicas dos modelos elásticos usando a equação de Zoeppritz e as aproximações Aki e Richards (1980) e Shuey (1985), obtidas usando o Modelo 1 são mostrados nas Figuras 17.a, 17.b, 17.c, respectivamente.

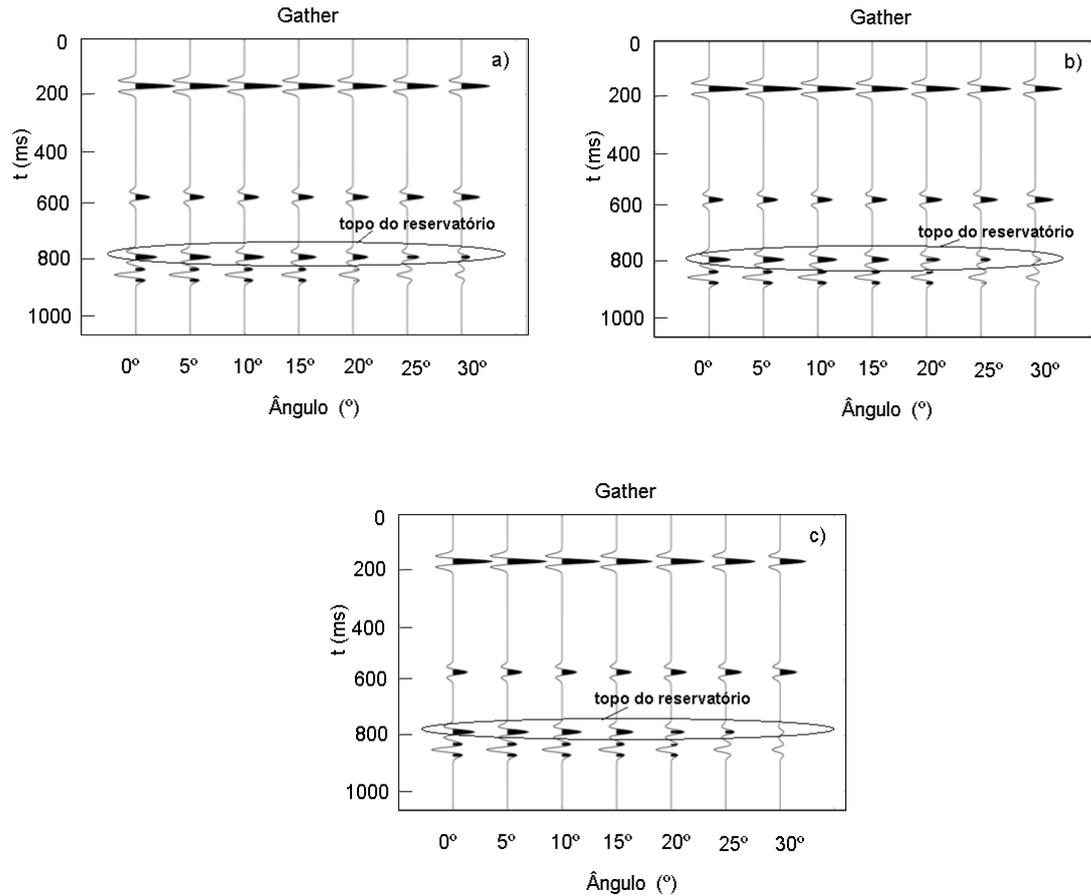


Figura 17: Resposta sísmica obtida para o Modelo 1 usando: a) Equação de Zoeppritz. b) Aproximação de Aki e Richards (1980). c) Aproximação de Shuey (1985).

Analisando a Figura 17 na região do reservatório, pode-se observar uma diminuição da amplitude com o aumento do ângulo de incidência, resultado que condiz com a anomalia AVO de Classe I. A olho nu todas as abordagens produzem resultados bem similares.

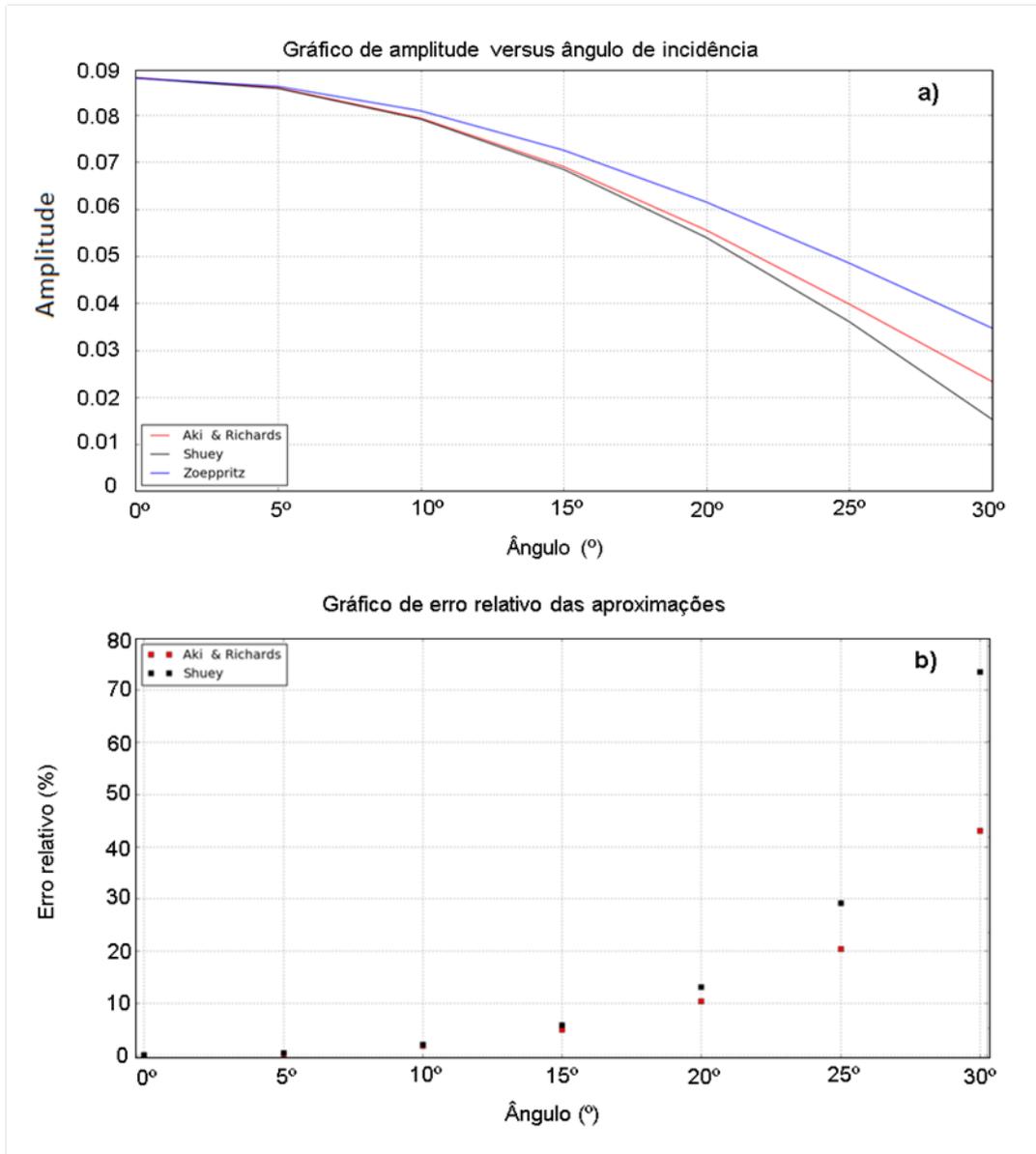


Figura 18: a) Amplitude versus ângulo de incidência no topo do reservatório para as equações de Zoeppritz e suas aproximações para o Modelo 1. b) Módulo da diferença entre as aproximações e a equação de Zoeppritz para o Modelo 1.

Ao analisar o Figura 18, ambas aproximações são idênticas até 5°, mas para ângulos maiores observa-se que a aproximação de Aki e Richards (1980) é mais próxima a equação de Zoeppritz e se diferencia muito da aproximação de Shuey (1985), que tende a diferente na variação da amplitude com o ângulo de incidência e fugindo da tendência da equação de Zoeppritz e apresenta um erro relativo de aproximadamente 55% para  $\theta = 30^\circ$  (Figura 18).

### 4.3.2 Modelagem Elástica para o Modelo 2

Os *gathers* modelados para o Modelo 2 com a aproximação de Zoeppritz, aproximações de Aki e Richards (1980) e Shuey (1985) são mostradas nas Figuras 19.a, 19.b e 19.c.

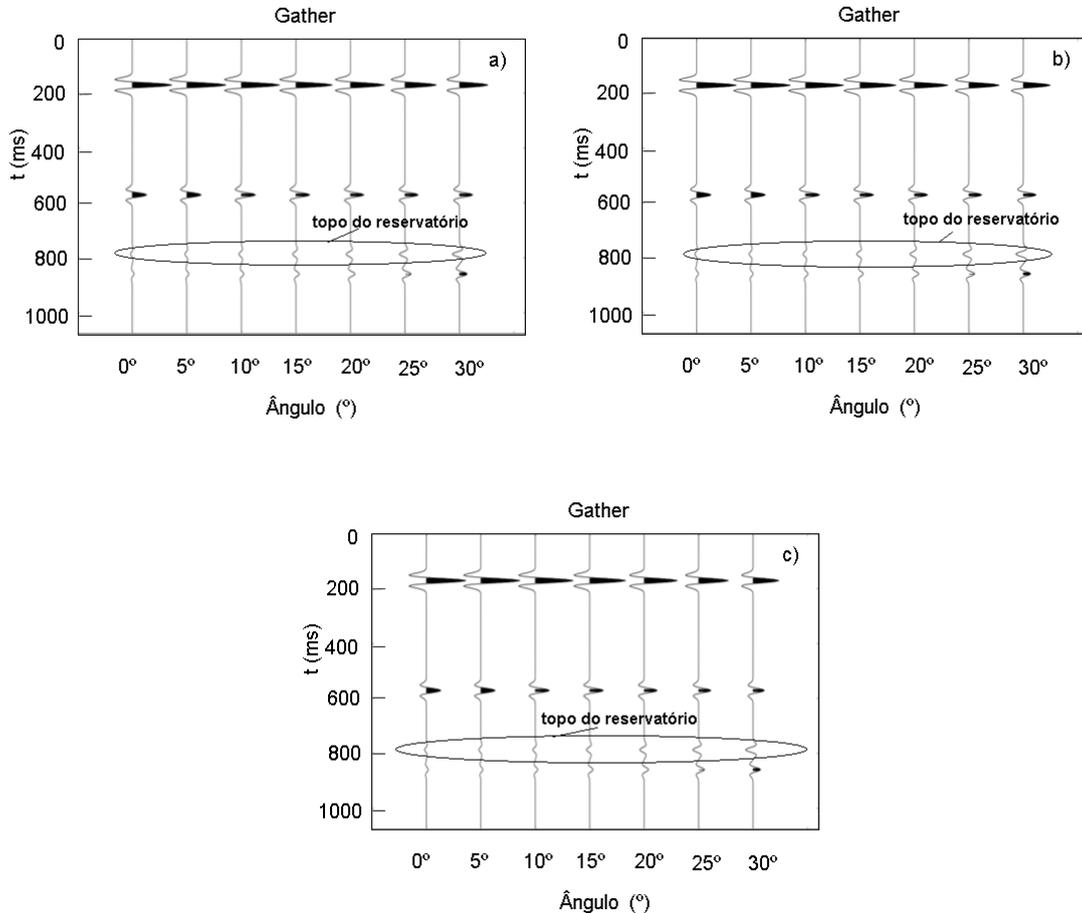


Figura 19: Resposta sísmica obtida para o Modelo 2 usando: a) Equação de Zoeppritz. b) Aproximação de Aki e Richards (1980). c) Aproximação de Shuey (1985).

Como mostra a Figura 19, os primeiros traços sísmicos próximos ao zero *offset* na região do reservatório possuem amplitude próxima de zero, o que dificulta sua interpretação. A magnitude aumenta com o ângulo de incidência devido a camada do reservatório possuir um alto gradiente.

Ao comparar a equação de Zoeppritz e suas aproximações, percebe-se que as aproximações são muito similares e quase não é possível notar diferenças. Analisando a Figura 20.a pode-se notar que as aproximações são idênticas a equação de Zoeppritz até  $\theta = 10^\circ$ . No entanto tal semelhança, diminui para os ângulos maiores. A Figura 20.b mostra o erro relativo das duas aproximações em relação a equação de Zoeppritz.

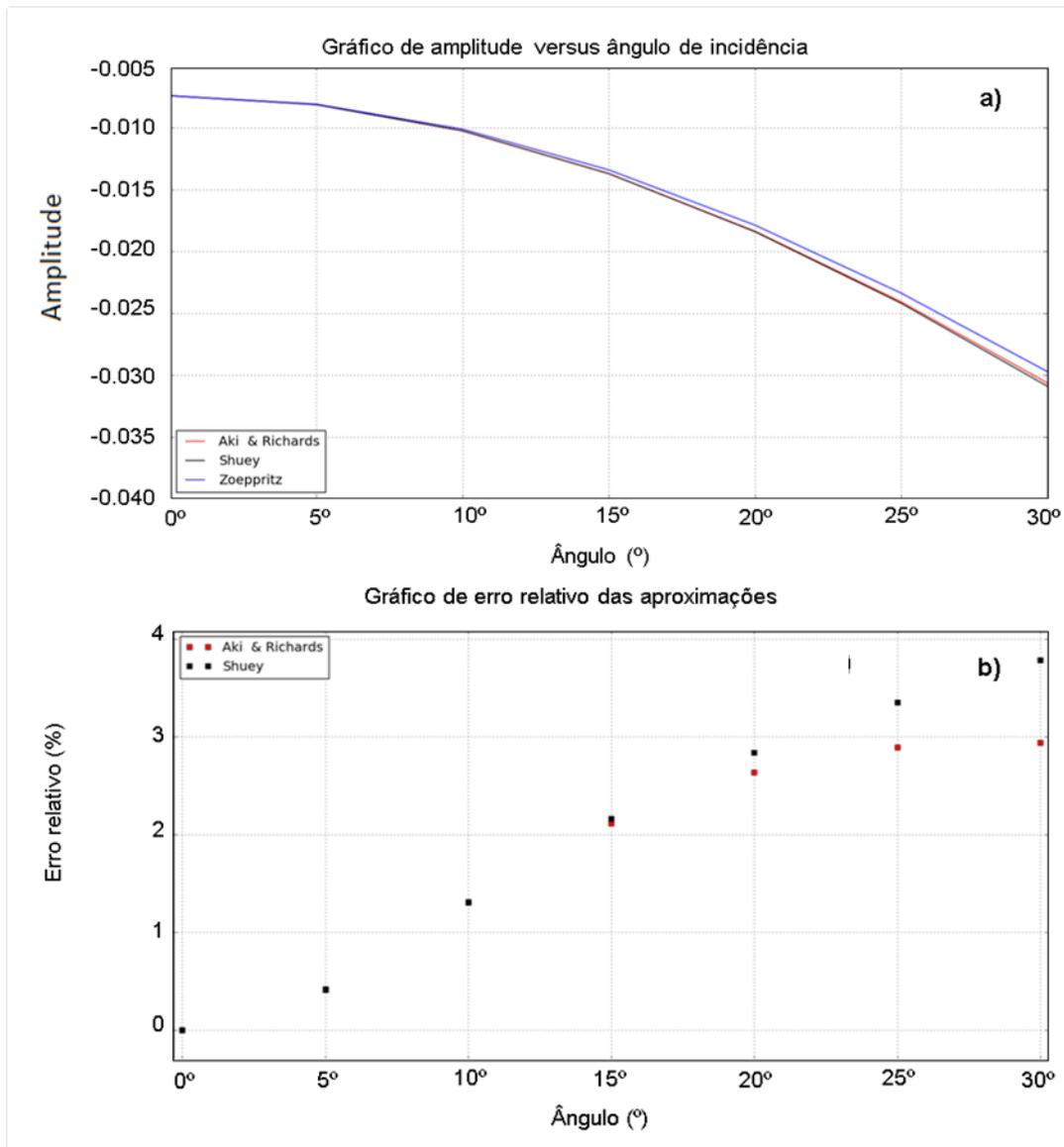


Figura 20: a) Amplitude versus ângulo de incidência no topo do reservatório para as equações de Zoeppritz e suas aproximações para o Modelo 2. b) Módulo da diferença entre as aproximações e a equação de Zoeppritz para o Modelo 2.

Como mostra a Figura 20.b, as aproximações de Aki e Richards (1980) e Shuey (1985) são idênticas até  $\theta \leq 10^\circ$ , mas conforme se aumenta o ângulo, a aproximação Aki e Richards (1980) estabiliza seu erro por volta de 3%. Já a aproximação de Shuey (1985) possui um erro relativo crescente, sendo a aproximação menos eficaz, chegando a 4% de erro.

### 4.3.3 Modelagem Elástica para o Modelo 3

A modelagem dos *gathers* do Modelo 3 usando as equações de Zoeppritz e as aproximações de Aki e Richards (1980) e Shuey (1985) são apresentadas nas Figuras 21.a, 21.b e 21.c.

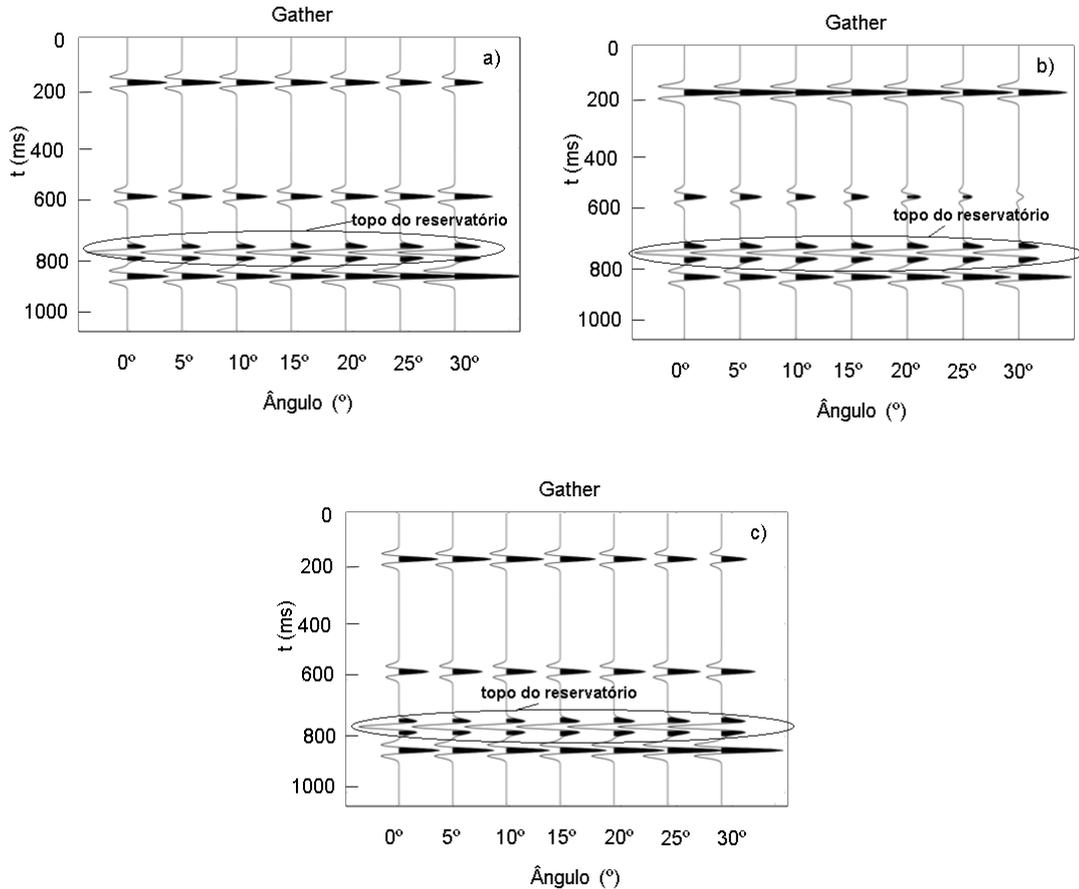


Figura 21: Resposta sísmica obtida para o Modelo 3 usando: a) Equação de Zoeppritz. b) Aproximação de Aki e Richards (1980). c) Aproximação de Shuey (1985).

Observando os resultados, pode-se verificar que há uma amplitude alta na região do reservatório e a magnitude da amplitude aumenta conforme o ângulo de incidência aumenta. Tal fato se dá devido ao gradiente negativo, característico de anomalia AVO de Classe III. Novamente a aproximação de Aki e Richards (1980) se assemelha em relação a aproximação de Shuey (1985). A Figura 22.a mostra o gráfico da amplitude versus o ângulo de incidência e a Figura 22.b mostra o erro relativo das aproximações em relação à equação de Zoeppritz na interface do topo do reservatório.

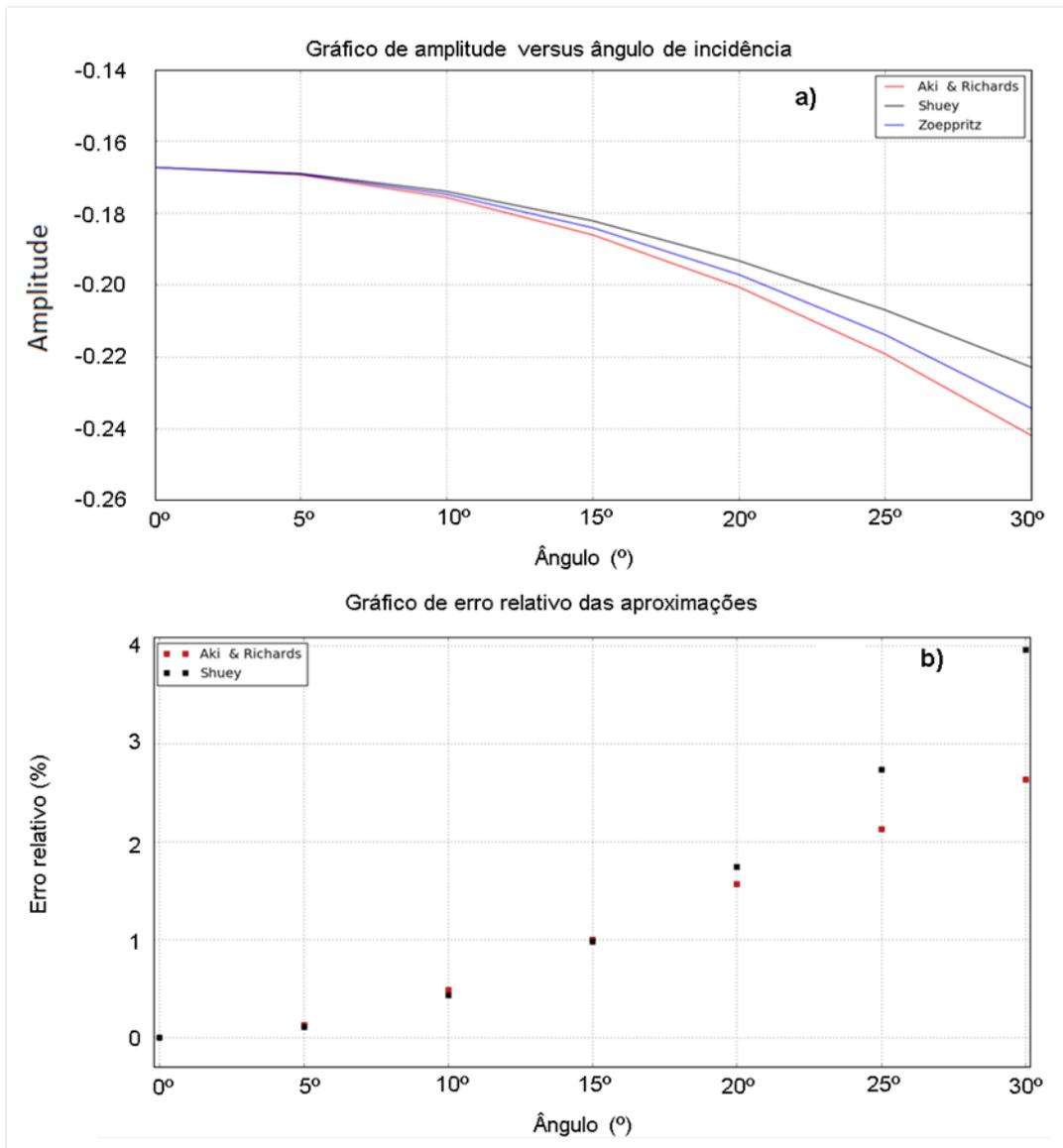


Figura 22: a) Amplitude versus ângulo de incidência no topo do reservatório para as equações de Zoeppritz e suas aproximações para o Modelo 3. b) Módulo da diferença entre as aproximações e a equação de Zoeppritz para o Modelo 3.

Ao verificar a Figura 22.a, nota-se que a equação de Zoeppritz e a aproximação Aki e Richards (1980) tem alto valor inicial e gradiente negativo, representando uma anomalia AVO de Classe III. Como esperado, a aproximação Shuey (1985) possui um erro relativo maior que a aproximação de Aki e Richards (1980), especialmente para ângulos maiores.

#### 4.3.4 Modelagem Elástica para o Modelo 4

Os resultados da modelagem dos gathers para o Modelo 4 usando a equação de Zoeppritz e as aproximações de Aki e Richards (1980) e Shuey (1985) são apresenta-

das nas Figuras 23.a, 23.b e 23.c, respectivamente.

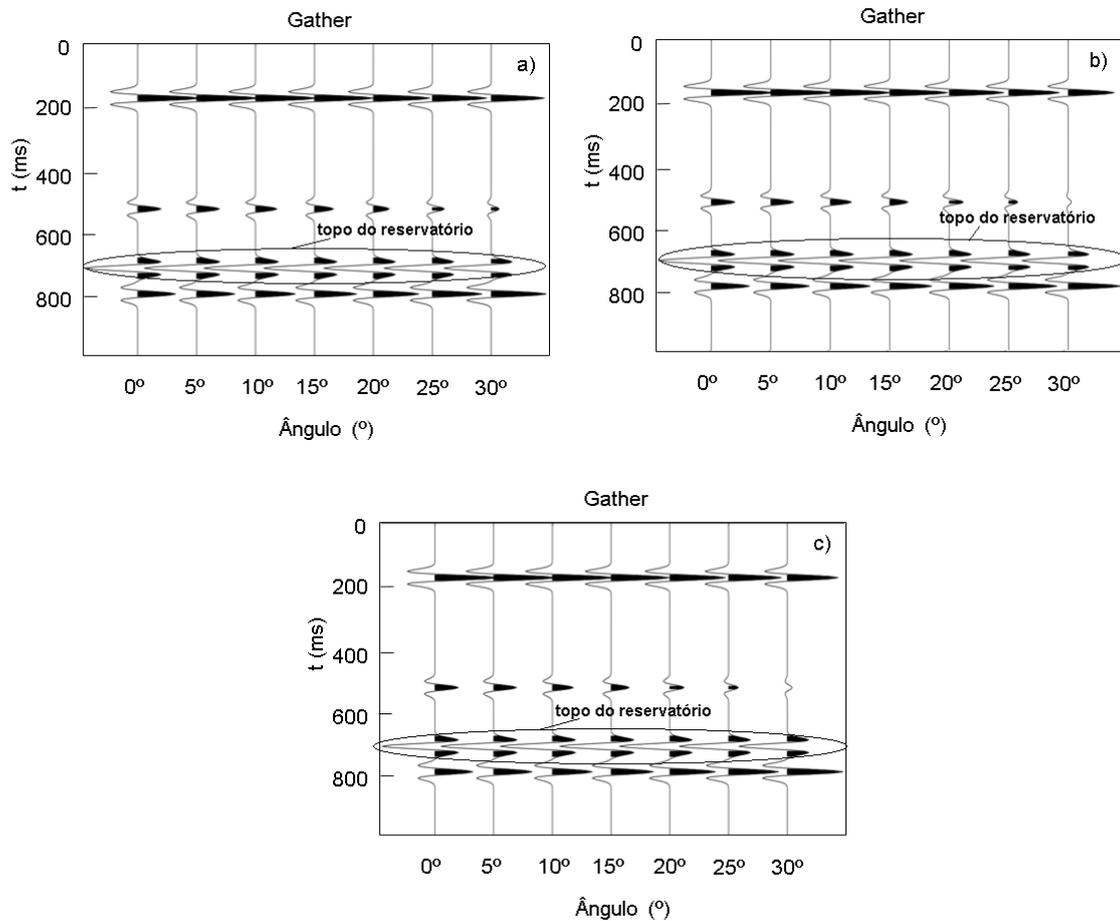


Figura 23: Resposta sísmica obtida para o Modelo 4 usando: a) Equação de Zoeppritz. b) Aproximação de Aki e Richards (1980). c) Aproximação de Shuey (1985).

Analisando os resultados, percebe-se que na região do reservatório a amplitude do primeiro traço é alta. Com o aumento do ângulo de incidência há uma diminuição da amplitude, caracterizando uma anomalia AVO de Classe IV.

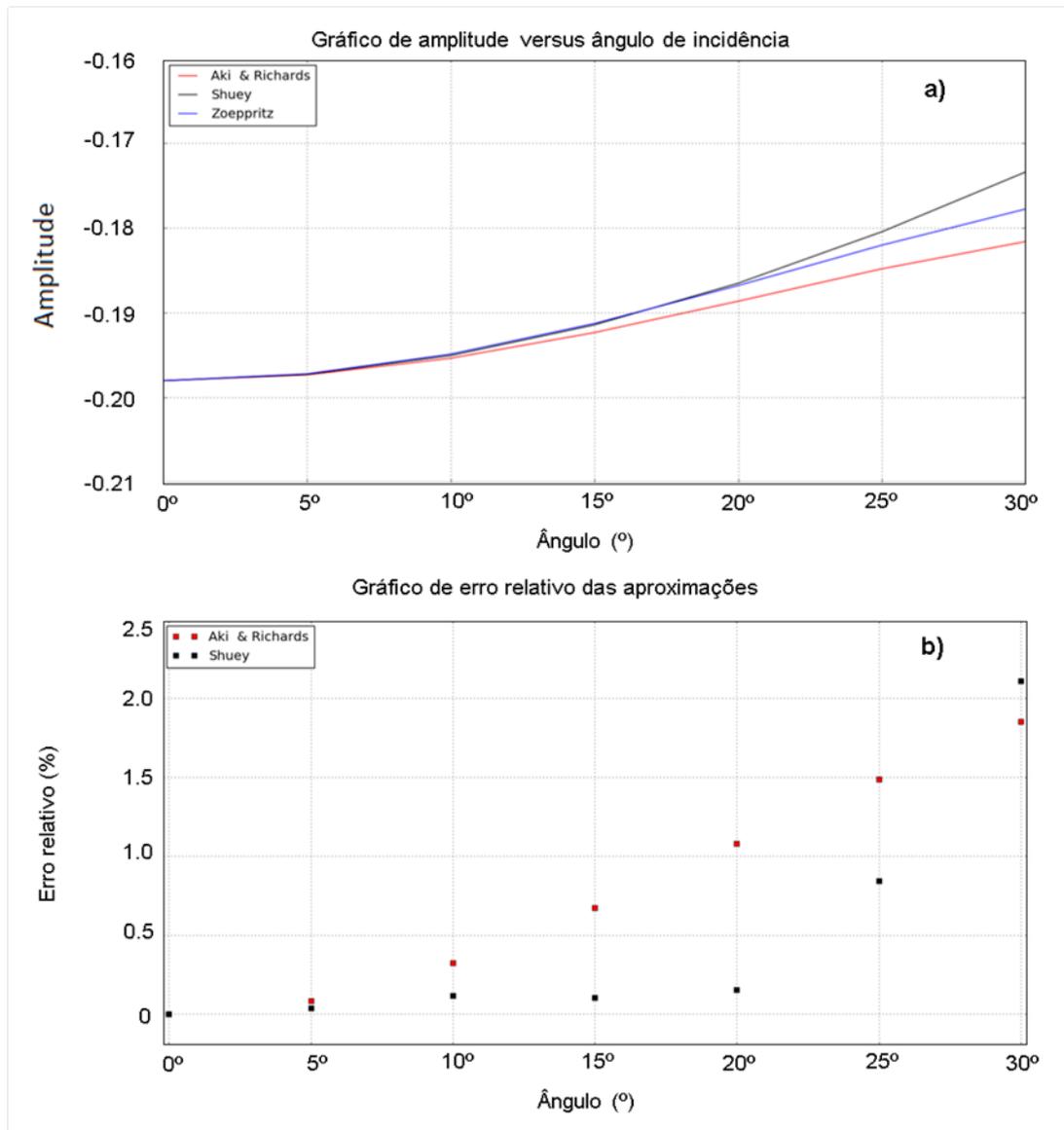


Figura 24: a) Amplitude versus ângulo de incidência no topo do reservatório para as equações de Zoeppritz e suas aproximações para o Modelo 4. b) Módulo da diferença entre as aproximações e a equação de Zoeppritz para o Modelo 4.

Ao verificar a Figura 24.a, todas as abordagens são muito similares, verificando que ambas as aproximações representaram bem a equação de Zoeppritz. Neste modelo, a aproximação de Shuey (1985) produz erros menores, possuindo erros relativos menores que 1% para ângulos menores que  $\theta \leq 25^\circ$ .

## 5 Conclusões

No presente trabalho, foram criados algoritmos para simular dados pós-empilhamento e pré-empilhamento usando diferentes cenários geológicos. A partir destes dados foi possível obter uma estimativa da resposta sísmica em um contexto geológico, levando em conta alguns dos fenômenos da propagação de onda. Os principais objetivos alcançados foram a modelagem de dados pós-empilhamento usando o modelo convulucional considerando a presença de ruído, atenuação e dispersão e também a modelagem de *gather*s a partir das equações de Zoeppritz e suas aproximações para estudar as anomalias de AVO.

Conclui-se que na modelagem acústica, a mudança de fácies era facilmente percebida sem e com a presença do ruído, com exceção do Modelo 2, que quase não tinha contraste de impedância acústica. Ao adicionar os efeitos da atenuação e dispersão, a interpretação foi afetada uma vez que a Terra funciona como um filtro passa-baixa, ou seja, as altas frequências são atenuadas. Causando queda de amplitude e perda de resolução sísmica devido ao alargamento do pulso sísmico causado pela atenuação e mudança de fase causada pela dispersão.

Na modelagem dos dados pré-empilhamento, os resultados confirmaram a base teórica apresentada sobre anomalias de AVO. A diferença entre as aproximações e a equação de Zoeppritz são dificilmente verificadas a partir do *gather*, apenas sendo identificadas no gráfico de amplitude versus espaçamento e erro relativo das aproximações na interface do reservatório. No geral, a aproximação que mais bem representou a equação de Zoeppritz foi a aproximação de Aki e Richards (1980), que manteve a menor taxa de erro relativo nos Modelos 1, 2 e 3, das quais são as anomalias mais comumente encontradas. A aproximação de Shuey (1985) conseguiu representar bem a equação de Zoeppritz no Modelo 4, possuindo menor erro no topo do reservatório.

No geral, a equação de Zoeppritz é a abordagem mais plausível para replicar a resposta sísmica de um modelo geológico, mas em caso de grande volume de dados e a necessidade de um algoritmo útil e de menor custo computacional, a aproximação de Aki e Richards (1980) satisfaz tais necessidades uma vez que a mesma não difere

de forma tão drástica da equação de Zoeppritz para todos os casos.

A partir deste trabalho, ressaltou-se a importância de levar em consideração todas as propriedades físicas das rochas (velocidade compressional, velocidade cisalhante e densidade), uma vez que uma análise apenas na impedância acústica pode ser ambígua e dar resultados pouco conclusivos, como no Modelo 2 ou resultados muito similares como os Modelos 3 e 4. Porém, ao levar em conta todas as características físicas, pode-se fazer uma distinção clara da geologia presente nos modelos, principalmente ao comparar a variação da amplitude com o espaçamento entre os Modelos 3 e 4, evidenciando a diferença nas propriedades físicas do reservatório de ambos os modelos.

Como trabalhos futuros sugeridos são:

- Utilização de atenuação e dispersão na modelagem elástica a fim de ver os impactos de tais efeitos nos dados pré-empilhamento.
- Aplicação de estudo AVO não só da componente compressional mas também da componente cisalhante, com o propósito de diminuir a incerteza quanto a interpretação das anomalias AVO.
- A aplicação do conceito de fator de fluido proposto por Fatti J. L. (1994) para tentar validar a eficácia do fator de fluido em associar conteúdo de hidrocarboneto nos modelos geológicos.
- Utilização de diferentes técnicas de inversão para verificar a confiabilidade da inversão ao se comparar seu resultado com o modelo criado.



## **Referências**

- AKI, K.; RICHARDS, P. *Quantitative Seismology*. [S.l.]: University Science Books, 1980.
- ALONSO, M.; FINN, E. J. *Física - Volume II: Campos e Ondas*. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1967.
- AVSETH, P.; MUKERJI, T.; MAVKO, G. *Quantitative Seismic Interpretation*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005.
- CASTAGNA, J. P.; BACKUS, M. M. *Offset-Dependent Reflectivity - Theory and Practice of AVO Analysis*. [S.l.]: Society of Exploration Geophysicists, 1993.
- CASTAGNA, J. P.; SWAN, H. W. Principles of avo crossplotting. *The Leading Edge*, 1997.
- CERVENY, V. *Seismic Ray Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001.
- FATTI J. L., S. G. C. V. P. J. S. P. J. L. P. R. Detection of gas in sandstone reservoirs using avo analysis: A 3-d seismic case history using the goestack technique. *Geophysics*, 1994.
- HAMLIN, W. Thin beds, tuning and avo. *The Leading Edge*, 2014.
- KEAREY, P.; BROOKS, M.; HILL, I. *An introduction to geophysical exploration*. [S.l.]: Blackwell Science Ltd, 2002.
- KJARTANSSON, E. Constant q-wave propagation and attenuation. *Journal of Geophysical Research*, 1979.
- LI, J.; YANG, Z.; WANG, Y.; SHI, Y. Joint pp and ps avo seismic inversion using exact Zoeppritz equations. *Geophysics*, 2015.
- LUPINACCI, W. M.; FRANCO, A. P.; OLIVEIRA, S. A. M.; MORAES, F. S. A combined time-frequency filtering strategy for q-factor compensation of poststack seismic data. *Geophysics*, 2017.
- LUPINACCI, W. M.; OLIVEIRA, S. A. M. Q factor estimation from the amplitude spectrum of time-frequency transform of stacked reflection seismic data. *Journal of Applied Geophysics*, 2015.
- MAVKO, G.; MUKERJI, T.; DVORKIN, J. *The Rock Physics Handbook*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- MIRANDA, P. F. P. *AVO Multicomponente: Inversão linear e análise da aplicação a reservatório delgado*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Norte Fluminense, 2007.

- OLIVEIRA, S. A. M.; LUPINACCI, W. M. L1 norm inversion method for deconvolution in attenuating media. *Geophysical Prospecting*, v. 61, n. 4, p. 771–777, 2013.
- OSTRANDER, W. J. Plane-wave reflection coefficients for gas sands at nonnormal angles of incidence. *Geophysics*, 1984.
- RUTHERFORD, S. R.; WILLIAMS, R. H. Amplitude-versus-offset variations in gas sands. *Geophysics*, 1989.
- SHERIFF, R. E.; GELDART, L. P. *Exploration Seismology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995.
- SHUEY, R. T. A simplification of the Zoeppritz equations. *Geophysics*, 1985.
- TELFORD, W. M.; GELDART, L. P.; SHERIFF, R. E. *Applied Geophysics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1990.
- TOKSOZ, M. N.; JOHNSTON, D. H. *Seismic wave attenuation*. [S.l.: s.n.], 1981.
- WANG, Y. *Seismic Inverse Q Filtering*. [S.l.]: Blackwell Publishing, 2008.
- ZHI, L.; CHEN, S.; LI, X. Amplitude variation with angle inversion using the exact Zoeppritz equations - theory and methodology. *Geophysics*, 2016.
- ZOEPPRITZ, K. On the reflection and penetration of seismic waves through unstable layers. *Göttinger Nachrichten*, 1., 1919.

## APÊNDICE A - Dedução das equações de Zoeppritz

Neste apêndice é dado o passo-a-passo da resolução das equações de Zoeppritz.

As equações de Zoeppritz representam a energia refletida e transmitida das ondas compressoriais e cisalhantes. A Figura 25 ilustra a reflexão, conversão e transmissão de uma onda compressional incidente em uma interface de meios diferentes.

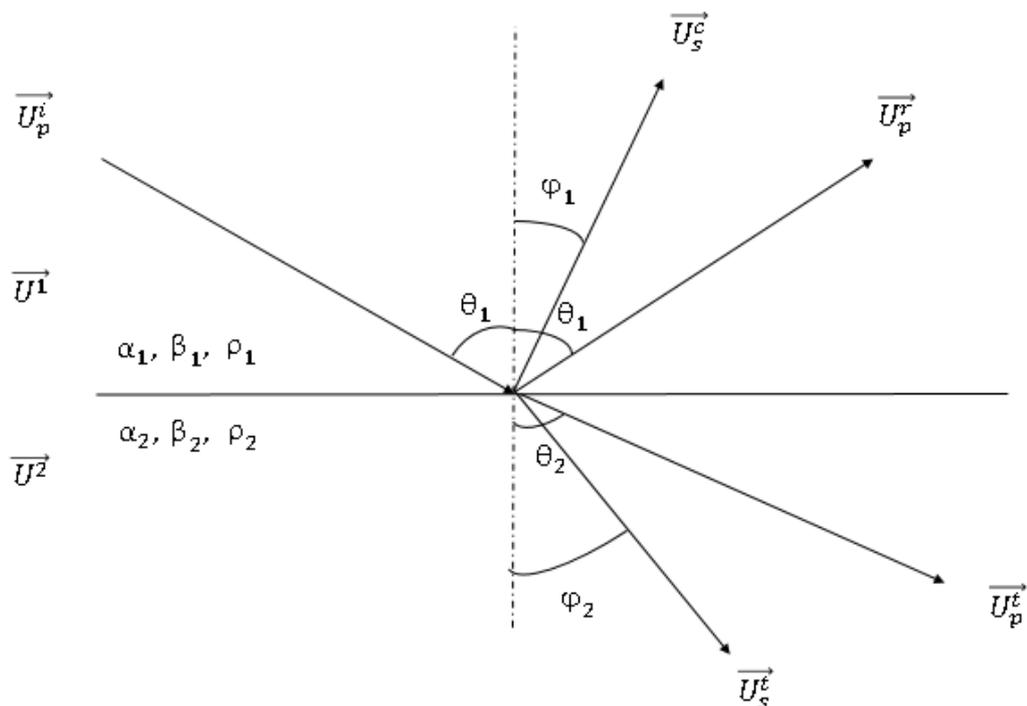


Figura 25: Ilustração demonstrando a reflexão, conversão e transmissão de uma onda compressional incidente com ângulo de incidência  $\theta_1$ .

### A.1 Condições de Contorno

Para satisfazer a equação da onda, são dadas as condições de contorno:

•Continuidade do deslocamento em  $z = 0$

$$\vec{U}_1 = \vec{U}_2. \quad (\text{A.1})$$

Logo:

$$\vec{U}_1^x = \vec{U}_2^x, \quad (\text{A.2})$$

$$\vec{U}_1^y = \vec{U}_2^y, \quad (\text{A.3})$$

$$\vec{U}_1^z = \vec{U}_2^z. \quad (\text{A.4})$$

•Continuidade da tensão em  $z = 0$

$$\sigma_{zz}^1 = \sigma_{zz}^2, \quad (\text{A.5})$$

$$\sigma_{xz}^1 = \sigma_{xz}^2, \quad (\text{A.6})$$

$$\sigma_{yz}^1 = \sigma_{yz}^2. \quad (\text{A.7})$$

A)  $\sigma_{zz}^1 = \lambda_1(\epsilon_{zz}^1 + \epsilon_{yy}^1 + \epsilon_{xx}^1) + 2\mu_1\epsilon_{zz}$ , temos:

$$\sigma_{zz}^1 = \lambda_1\left(\frac{\delta\vec{U}_1^x}{\delta x} + \frac{\delta\vec{U}_1^z}{\delta z} + \frac{\delta\vec{U}_1^y}{\delta y}\right) + 2\mu_1\frac{\delta\vec{U}_1^z}{\delta z}, \quad (\text{A.8})$$

$$\sigma_{zz}^2 = \lambda_2\left(\frac{\delta\vec{U}_2^x}{\delta x} + \frac{\delta\vec{U}_2^z}{\delta z} + \frac{\delta\vec{U}_2^y}{\delta y}\right) + 2\mu_2\frac{\delta\vec{U}_2^z}{\delta z}. \quad (\text{A.9})$$

B)  $\sigma_{yz}^1 = \sigma_{yz}^2$ , temos:

$$\mu_1\left(\frac{\delta\vec{U}_1^y}{\delta z} + \frac{\delta\vec{U}_1^z}{\delta y}\right) = \mu_2\left(\frac{\delta\vec{U}_2^y}{\delta z} + \frac{\delta\vec{U}_2^z}{\delta y}\right), \quad (\text{A.10})$$

C)  $\sigma_{xz}^1 = \sigma_{xz}^2$ , temos:

$$\mu_1\left(\frac{\delta\vec{U}_1^x}{\delta z} + \frac{\delta\vec{U}_1^z}{\delta x}\right) = \mu_2\left(\frac{\delta\vec{U}_2^x}{\delta z} + \frac{\delta\vec{U}_2^z}{\delta x}\right). \quad (\text{A.11})$$

Separando  $\vec{U}^1$  e  $\vec{U}^2$  em quatro componentes, temos:

•Para  $\vec{U}^1$ :

$$\vec{U}_p^i = A^i (\sin \theta_1, 0, -\cos \theta_1) e^{i\omega \left( \frac{\sin \theta_1}{\alpha_1} x - \frac{\cos \theta_1}{\alpha_1} z \right)}, \quad (\text{A.12})$$

$$\vec{U}_p^r = A^r (\sin \theta_1, 0, \cos \theta_1) e^{i\omega \left( \frac{\sin \theta_1}{\alpha_1} x + \frac{\cos \theta_1}{\alpha_1} z \right)}, \quad (\text{A.13})$$

$$\vec{U}_{sv}^c = B^c (\cos \phi_1, 0, -\sin \phi_1) e^{i\omega \left( \frac{\sin \phi_1}{\beta_1} x + \frac{\cos \phi_1}{\beta_1} z \right)}, \quad (\text{A.14})$$

$$\vec{U}_{sh}^c = C^c (0, 1, 0) e^{i\omega \left( \frac{\sin \phi_1}{\beta_1} x + \frac{\cos \phi_1}{\beta_1} z \right)}. \quad (\text{A.15})$$

•Para  $\vec{U}^2$ :

$$\vec{U}_p^t = A^t (\sin \theta_2, 0, -\cos \theta_2) e^{i\omega \left( \frac{\sin \theta_2}{\alpha_2} x - \frac{\cos \theta_2}{\alpha_2} z \right)}, \quad (\text{A.16})$$

$$\vec{U}_{sv}^t = B^t (\cos \phi_2, 0, -\sin \phi_2) e^{i\omega \left( \frac{\sin \phi_2}{\beta_2} x - \frac{\cos \phi_2}{\beta_2} z \right)}, \quad (\text{A.17})$$

$$\vec{U}_{sh}^t = C^t (0, 1, 0) e^{i\omega \left( \frac{\sin \phi_2}{\beta_2} x - \frac{\cos \phi_2}{\beta_2} z \right)}, \quad (\text{A.18})$$

no qual  $\vec{U}^1 = \vec{U}_p^i + \vec{U}_p^r + \vec{U}_{sv}^c + \vec{U}_{sh}^c$  e  $\vec{U}^2 = \vec{U}_p^t + \vec{U}_{sv}^t + \vec{U}_{sh}^t$ . No qual  $U^1$  e  $U^2$  é o conjunto de todas as ondas nos respectivos meios 1 e 2,  $\vec{U}_p^i$  é a onda compressional incidente,  $\vec{U}_p^r$  é a onda compressional refletida,  $\vec{U}_{sv}^c$  é a onda cisalhante vertical convertida,  $\vec{U}_{sh}^c$  é a onda cisalhante horizontal convertida,  $\vec{U}_p^t$  é a onda compressional transmitida,  $\vec{U}_{sv}^t$  é a onda cisalhante vertical transmitida e  $\vec{U}_{sh}^t$  é a onda cisalhante horizontal transmitida.

## A.2 Lei de Snell Generalizada

Como  $\vec{U}^1_x = \vec{U}^2_x$ , temos:

$$\begin{aligned} A^i \sin \theta_1 e^{i\omega \left( \frac{\sin \theta_1}{\alpha_1} x \right)} + A^r \sin \theta_1 e^{i\omega \left( \frac{\sin \theta_1}{\alpha_1} x \right)} + B^c \cos \phi_1 e^{i\omega \left( \frac{\sin \phi_1}{\beta_1} x \right)} \\ = A^t \sin \theta_2 e^{i\omega \left( \frac{\sin \theta_2}{\alpha_2} x \right)} + B^t \cos \phi_2 e^{i\omega \left( \frac{\sin \phi_2}{\beta_2} x \right)}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Logo, chega-se a conclusão de que:

$$\frac{\sin(\theta_1)}{\alpha_1} = \frac{\sin(\theta_2)}{\alpha_2} = \frac{\sin(\phi_1)}{\beta_1} = \frac{\sin(\phi_2)}{\beta_2} = p. \quad (\text{A.20})$$

No qual  $p$  é o parâmetro de raio.

### A.3 Demonstração

•Fazendo somente na direção  $y$ -:

$$\vec{U}^1_y = \vec{U}^2_y, \quad (\text{A.21})$$

$$C^c e^{i\omega(\frac{\sin \phi_1}{\beta_1}x + \frac{\cos \phi_1}{\beta_1}z)} = C^t e^{i\omega(\frac{\sin \phi_2}{\beta_2}x - \frac{\cos \phi_2}{\beta_2}z)}. \quad (\text{A.22})$$

Logo:

$$C^c = C^t. \quad (\text{A.23})$$

Fazendo  $\sigma_{yz}^1 = \sigma_{yz}^2$ , temos:

$$\mu_1 \left( \frac{\delta \vec{U}^1_y}{\delta z} + \frac{\delta \vec{U}^1_z}{\delta y} \right) = \mu_2 \left( \frac{\delta \vec{U}^2_y}{\delta z} + \frac{\delta \vec{U}^2_z}{\delta y} \right), \quad (\text{A.24})$$

$$\mu_1 \left( \frac{\cos \phi_1}{\beta_1} C^c e^{i\omega(\frac{\sin \phi_1}{\beta_1}x + \frac{\cos \phi_1}{\beta_1}z)} \right) = \mu_2 \left( \frac{\cos \phi_2}{\beta_2} C^t e^{i\omega(\frac{\sin \phi_2}{\beta_2}x - \frac{\cos \phi_2}{\beta_2}z)} \right). \quad (\text{A.25})$$

Os termos exponenciais não serão representados, pois quando utilizar as condições de contorno para o cálculo dos coeficientes de reflexão e transmissão ambos serão utilizados para provar a Lei de Snell. Assim, a equação fica:

$$\mu_1 \frac{\cos \phi_1}{\beta_1} C^c = \mu_2 \frac{\cos \phi_2}{\beta_2} C^t. \quad (\text{A.26})$$

$$C^c = \frac{\mu_2 \beta_1 \cos \phi_2}{\mu_1 \beta_2 \cos \phi_1} C^t. \quad (\text{A.27})$$

Como  $\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\sin(\phi_1)}{\sin(\phi_2)}$  a partir da Lei de Snell, temos:

$$C^c = \frac{\mu_2 \tan \phi_1}{\mu_1 \tan \phi_2} C^t. \quad (\text{A.28})$$

Assim, somente  $C^c = C^t = 0$  para satisfazer as condições anteriores.

•Calculando todas as derivadas, temos:

$$\frac{\delta \vec{U}^1_x}{\delta x} = (A^i \frac{\sin^2 \theta_1}{\alpha_1} + A^r \frac{\sin^2 \theta_1}{\alpha_1} + B^c \frac{\sin \phi_1 \cos \phi_1}{\beta_1}) i\omega, \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{\delta \vec{U}^2_x}{\delta x} = (A^t \frac{\sin^2 \theta_2}{\alpha_2} + B^t \frac{\sin \phi_2 \cos \phi_2}{\beta_2}) i\omega, \quad (\text{A.30})$$

$$\frac{\delta \vec{U}^1_y}{\delta y} = \frac{\delta \vec{U}^2_y}{\delta y} = 0, \quad (\text{A.31})$$

$$\frac{\delta \vec{U}^1_z}{\delta z} = (A^i \frac{\cos^2 \theta_1}{\alpha_1} + A^r \frac{\cos^2 \theta_1}{\alpha_1} - B^c \frac{\sin \phi_1 \cos \phi_1}{\beta_1}) i\omega, \quad (\text{A.32})$$

$$\frac{\delta \vec{U}^2_z}{\delta z} = (A^t \frac{\cos^2 \theta_2}{\alpha_2} - B^t \frac{\sin \phi_2 \cos \phi_2}{\beta_2}) i\omega, \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{\delta \vec{U}^1_x}{\delta z} = (-A^i \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_1}{\alpha_1} + A^r \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_1}{\alpha_1} + B^c \frac{\cos^2 \phi_1}{\beta_1}) i\omega, \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{\delta \vec{U}^2_x}{\delta z} = (-A^i \frac{\sin \theta_2 \cos \theta_2}{\alpha_2} - B^t \frac{\cos^2 \phi_2}{\beta_2}) i\omega, \quad (\text{A.35})$$

$$\frac{\delta \vec{U}^1_z}{\delta x} = (-A^i \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_1}{\alpha_1} + A^r \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_1}{\alpha_1} - B^c \frac{\sin^2 \phi_1}{\beta_1}) i\omega, \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{\delta \vec{U}^2_z}{\delta x} = (-A^i \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_1}{\alpha_1} + B^t \frac{\sin^2 \phi_2}{\beta_2}) i\omega. \quad (\text{A.37})$$

•Fazendo somente na direção  $x$ -:

$$\vec{U}^1_x = \vec{U}^2_x. \quad (\text{A.38})$$

Dividindo todos os termos da equação por  $A^i$ , temos:

$$\frac{A^i}{A^i} \sin \theta_1 + \frac{A^r}{A^i} \sin \theta_1 + \frac{B^c}{A^i} \cos \phi_1 = \frac{A^t}{A^i} \sin \theta_2 + \frac{B^t}{A^i} \cos \phi_2. \quad (\text{A.39})$$

Como  $\frac{A^r}{A^i} = R_{pp}$ ,  $\frac{B^c}{A^i} = R_{ps}$ ,  $\frac{A^t}{A^i} = T_{pp}$  e  $\frac{B^t}{A^i} = T_{ps}$ , no qual  $R_{pp}$  é coeficiente de reflexão da onda compressional,  $R_{ps}$  é o coeficiente de reflexão da onda cisalhante convertida,  $T_{pp}$  é o coeficiente de transmissão da onda compressional e  $T_{ps}$  é o coeficiente de transmissão da onda cisalhante convertida, temos:

$$\sin \theta_1 = -R_{pp} \sin \theta_1 - R_{ps} \cos \phi_1 + T_{pp} \sin \theta_2 + T_{ps} \cos \phi_2. \quad (\text{A.40})$$

•Fazendo somente na direção  $z$ -:

$$\vec{U}_z^1 = \vec{U}_z^2, \quad (\text{A.41})$$

$$\cos \theta_1 = R_{pp} \cos \theta_1 - R_{ps} \sin \phi_1 + T_{pp} \cos \theta_2 - T_{ps} \sin \phi_2. \quad (\text{A.42})$$

•Fazendo  $\sigma_{zz}^1 = \sigma_{zz}^2$ , temos:

$$\begin{aligned} & (2\mu_1 + \lambda_1) \left( \frac{\cos^2 \theta_1}{\alpha_1} + R_{pp} \frac{\cos^2 \theta_1}{\alpha_1} - R_{ps} \frac{\sin \phi_1 \cos \phi_1}{\beta_1} \right) \\ & + \lambda_1 \left( \frac{\sin^2 \theta_1}{\alpha_1} + R_{pp} \frac{\sin^2 \theta_1}{\alpha_1} + R_{ps} \frac{\sin \phi_1 \cos \phi_1}{\beta_1} \right) \\ = & (2\mu_2 + \lambda_2) \left( \frac{\cos^2 \theta_2}{\alpha_2} - T_{pp} \frac{\sin \phi_2 \cos \phi_2}{\beta_2} \right) + \lambda_2 \left( T_{pp} \frac{\sin^2 \theta_2}{\alpha_2} + T_{ps} \frac{\sin \phi_2 \cos \phi_2}{\beta_2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Agrupando em função de  $R_{pp}$ ,  $R_{ps}$ ,  $T_{pp}$  e  $T_{ps}$ , temos:

$$\begin{aligned} & R_{pp} \left[ (2\mu_1 + \lambda_1) \frac{\cos^2 \theta_1}{\alpha_1} + \lambda_1 \frac{\sin^2 \theta_1}{\alpha_1} \right] + R_{ps} \left[ (2\mu_1 + \lambda_1) \left( \frac{-\sin \phi_1 \cos \phi_1}{\beta_1} \right) + \lambda_1 \frac{\sin \phi_1 \cos \phi_1}{\beta_1} \right] \\ & + T_{pp} \left[ (2\mu_2 + \lambda_2) \left( \frac{-\cos^2 \theta_2}{\alpha_2} \right) \right] + T_{ps} \lambda_2 \left( \frac{-\sin^2 \theta_2}{\alpha_2} \right) + T_{ps} \left[ (2\mu_2 + \lambda_2) \left( \frac{\sin \phi_2 \cos \phi_2}{\beta_2} \right) \right. \\ & \left. + \lambda_2 \left( \frac{-\sin \phi_2 \cos \phi_2}{\beta_2} \right) \right] = -(2\mu_1 + \lambda_1) \left( \frac{-\cos^2 \theta_1}{\alpha_1} \right) + \lambda_1 \frac{\sin^2 \theta_1}{\alpha_1}. \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Fazendo  $2\mu_1 + \lambda_1 = \rho_1 \alpha_1^2$ ,  $2\mu_2 + \lambda_2 = \rho_2 \alpha_2^2$ ,  $\mu_1 = \rho_1 \beta_1^2$  e  $\mu_2 = \rho_2 \beta_2^2$ , temos:

$$\begin{aligned}
& R_{pp}(\rho_1\alpha_1)(1 - 2\sin^2\phi_1) + R_{ps}(-\rho_1\beta_1\sin 2\phi_1) \\
& + T_{pp}(-\rho_2\alpha_2)(1 - \sin\theta_2) + T_{ps}(\rho_2\beta_2\sin 2\phi_2) \\
& = \rho_1\alpha_1(1 - 2\sin\phi_1).
\end{aligned} \tag{A.45}$$

•Ao fazer  $\sigma_{zz}^1 = \sigma_{zz}^2$ , temos:

$$\mu_1\left(\frac{\delta\vec{U}_x^1}{\delta z} + \frac{\delta\vec{U}_z^1}{\delta x}\right) = \mu_2\left(\frac{\delta\vec{U}_x^2}{\delta z} + \frac{\delta\vec{U}_z^2}{\delta x}\right), \tag{A.46}$$

$$\begin{aligned}
& \mu_1\left(\frac{-\sin\theta_1\cos\theta_1}{\alpha_1} + R_{pp}\frac{\sin\theta_1\cos\theta_1}{\alpha_1} + R_{ps}\frac{\cos^2\phi_1}{\beta_1} - \frac{\sin\theta_1\cos\theta_1}{\alpha_1} + R_{pp}\frac{\sin\theta_1\cos\theta_1}{\alpha_1} - R_{ps}\frac{\sin^2\phi_1}{\beta_1}\right) \\
& = \mu_2\left(-T_{pp}\frac{\sin\theta_2\cos\theta_2}{\alpha_2} - T_{ps}\frac{\cos^2\phi_2}{\beta_2} - T_{pp}\frac{\sin\theta_2\cos\theta_2}{\alpha_2} + T_{ps}\frac{\sin^2\phi_2}{\beta_2}\right).
\end{aligned} \tag{A.47}$$

Agrupando em função de  $R_{pp}$ ,  $R_{ps}$ ,  $T_{pp}$  e  $T_{ps}$  e substituindo  $2\mu_1 + \lambda_1 = \rho_1\alpha_1^2$ ,  $2\mu_2 + \lambda_2 = \rho_2\alpha_2^2$ ,  $\mu_1 = \rho_1\beta_1^2$  e  $\mu_2 = \rho_2\beta_2^2$ , temos:

$$\begin{aligned}
& R_{pp}(2\rho_1\beta_1\sin\phi_1\cos\theta_1) + R_{ps}\rho_1\beta_1(1 - 2\sin^2\phi_1) \\
& + T_{pp}(2\rho_2\beta_2\sin\phi_2\cos\theta_2) + T_{ps}(\rho_2\beta_2(1 - \sin^2\phi_2)) \\
& = 2\rho_1\beta_1\sin\phi_1\cos\theta_1.
\end{aligned} \tag{A.48}$$

Agrupando as quatro equações, temos:

$$- R_{pp}\sin\theta_1 - R_{ps}\cos\phi_1 + T_{pp}\sin\theta_2 + T_{ps}\cos\phi_2 = \sin\theta_1, \tag{A.49}$$

$$R_{pp}\cos\theta_1 - R_{ps}\sin\phi_1 + T_{pp}\cos\theta_2 - T_{ps}\sin\phi_2 = \cos\theta_1, \tag{A.50}$$

$$\begin{aligned}
& R_{pp}(2\rho_1\beta_1\sin\phi_1\cos\theta_1) + R_{ps}\rho_1\beta_1(1 - 2\sin^2\phi_1) + T_{pp}(2\rho_2\beta_2\sin\phi_2\cos\theta_2) \\
& + T_{ps}(\rho_2\beta_2(1 - 2\sin^2\phi_2)) = 2\rho_1\beta_1\sin\phi_1\cos\theta_1,
\end{aligned} \tag{A.51}$$

$$\begin{aligned}
& R_{pp}(\rho_1\alpha_1)(1 - 2\sin^2\phi_1) + R_{ps}(-\rho_1\beta_1\sin 2\phi_1) + T_{pp}(-\rho_2\alpha_2)(1 - 2\sin^2\theta_2) \\
& + T_{ps}(\rho_2\beta_2\sin 2\phi_2) = \rho_1\alpha_1(1 - 2\sin\phi_1).
\end{aligned} \tag{A.52}$$

A partir deste sistema, pode-se chegar a forma matricial  $\mathbf{M}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{N}$ , onde  $\mathbf{M}$  é:

$$\begin{bmatrix} -\sin \theta_1 & -\cos \phi_1 & \sin \theta_2 & \cos \phi_2 \\ \cos \theta_1 & -\sin \phi_1 & \cos \theta_2 & -\sin \phi_2 \\ (2\rho_1\beta_1 \sin \phi_1 \cos \theta_1) & \rho_1\beta_1(1 - 2\sin^2 \phi_1) & (2\rho_2\beta_2 \sin \phi_2 \cos \theta_2) & (\rho_2\beta_2(1 - 2\sin^2 \phi_2)) \\ (\rho_1\alpha_1)(1 - 2\sin^2 \phi_1) & (-\rho_1\beta_1 \sin 2\phi_1) & (-\rho_2\alpha_2)(1 - 2\sin^2 \theta_2) & (\rho_2\beta_2 \sin 2\phi_2) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.53})$$

**r** é:

$$\begin{bmatrix} R_{pp} \\ R_{ps} \\ T_{pp} \\ T_{ps} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.54})$$

**N**

$$\begin{bmatrix} \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \\ 2\rho_1\beta_1 \sin \phi_1 \cos \theta_1 \\ \rho_1\alpha_1(1 - 2\sin^2 \phi_1) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.55})$$

Fazendo a inversa de **M** e multiplicando por **N**, temos uma matriz com muitos termos, para simplificar, definem-se os termos *a*, *b*, *c* e *d* como

$$a = \rho_2(1 - 2\beta_2^2 p^2) - \rho_1(1 - 2\beta_1^2 p^2), \quad (\text{A.56})$$

$$b = \rho_2(1 - 2\beta_2^2 p^2) + 2\rho_1\beta_1^2 p^2, \quad (\text{A.57})$$

$$c = \rho_1(1 - 2\beta_1^2 p^2) + 2\rho_2\beta_2^2 p^2, \quad (\text{A.58})$$

$$d = 2(\rho_2\beta_2^2 - \rho_1\beta_1^2). \quad (\text{A.59})$$

Usando os termos acima apresentados, os coeficientes *E*, *F*, *G*, *H*, e *D* ficam:

$$E = b \frac{\cos(\theta_1)}{\alpha_1} + c \frac{\cos(\theta_2)}{\alpha_2}, \quad (\text{A.60})$$

$$F = b \frac{\cos(\phi_1)}{\beta_1} + c \frac{\cos(\phi_2)}{\beta_2}, \quad (\text{A.61})$$

$$G = a - d \frac{\cos(\theta_1)}{\alpha_1} \frac{\cos(\phi_2)}{\beta_2}, \quad (\text{A.62})$$

$$H = a - d \frac{\cos(\theta_2)}{\alpha_2} \frac{\cos(\phi_1)}{\beta_1}, \quad (\text{A.63})$$

$$D = EF + GHp^2. \quad (\text{A.64})$$

Assim, os coeficientes  $R_{pp}$ ,  $R_{ps}$ ,  $T_{pp}$  e  $T_{ps}$  ficam da forma:

$$\begin{bmatrix} R_{pp} \\ R_{ps} \\ T_{pp} \\ T_{ps} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\{ \left( b \frac{\cos(\theta_1)}{\alpha_1} - c \frac{\cos(\theta_2)}{\alpha_2} \right) F - \left( a + d \frac{\cos(\theta_1)}{\alpha_1} \frac{\cos(\phi_2)}{\beta_2} \right) H p^2 \right\} \\ \frac{D}{- 2 \frac{\cos(\theta_1)}{\alpha_1} (ab + cd \frac{\cos(\theta_2)}{\alpha_2} \frac{\cos(\phi_2)}{\beta_2}) p \alpha_1} \\ \frac{\beta_1 D}{2 \rho_1 \frac{\cos(\theta_1)}{\alpha_1} F \alpha_1} \\ \frac{\alpha_2 D}{2 \rho_1 \frac{\cos(\theta_1)}{\alpha_1}} \\ \frac{\cos(\theta_1)}{\alpha_1} \\ D \end{bmatrix}. \quad (\text{A.65})$$